

Universidade de Lisboa  
Faculdade de Ciências  
Departamento de Matemática



## Sistemas Lotka-Volterra Dissipativos

Telmo Jorge Lucas Peixe

Mestrado em Matemática  
Análise Matemática

2010

Universidade de Lisboa  
Faculdade de Ciências  
Departamento de Matemática



## Sistemas Lotka-Volterra Dissipativos

Telmo Jorge Lucas Peixe

Dissertação orientada pelo Professor Doutor  
Pedro Miguel Nunes da Rosa Dias Duarte

Mestrado em Matemática  
Análise Matemática

2010



*Aos meus pais, Joaquim e Alice,  
e aos meus irmãos, José Carlos e Virgílio.*



## Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Pedro Miguel Duarte, muito obrigado pela sua disponibilidade desde os primeiros contactos, pela sua confiança, dedicação, infinita paciência, incentivo e fundamentalmente por todo o trabalho científico.

Aos professores que tive na licenciatura e no mestrado, muito obrigado pelo estímulo académico e científico e pela responsabilidade e seriedade com que me apoiaram nos estudos.

Ao Professor Luís Sanchez, enquanto coordenador do CMAF – Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais, muito obrigado pelos conselhos e sugestões, incentivos, motivação e apoio logístico.

Aos meus colegas e amigos, muito obrigado por de uma forma ou de outra me acompanharem no dia a dia e serem muito importantes no apoio emocional, na motivação e nas preciosas dicas para a escrita da tese.

Ao meu amigo Sílvio, muito obrigado pela dedicação, incentivo, sugestões, motivação e cumplicidade.

À Fátima (com muita saudade, em sua memória), ao Duarte e ao Simão, muito obrigado pela amizade com que sempre me acolhem e por todo o apoio e incentivo.

À minha família, nomeadamente, ao meu pai e aos meus irmãos, muito obrigado por me acolherem com amor incondicional nos seus núcleos familiares, o que tanto contribui para a minha estabilidade emocional e que se traduz na felicidade de viver o dia a dia.

À minha mãe, muito obrigado pelo exemplo de vida enquanto ser humano, pelo amor que dedica aos filhos de forma tão viva e presencial, por todos os incentivos nas mais diversas aventuras, nomeadamente na Matemática, e por ser um exemplo de mãe que muito admiro.

*Telmo Peixe*  
*Lisboa, 27 de Setembro de 2010*



## Resumo

Os sistemas Lotka-Volterra foram introduzidos por volta dos anos 1920, por Lotka e Volterra, de forma independente um do outro, quando começaram a publicar estudos sobre sistemas de equações diferenciais em áreas da química e da interacção de populações, respectivamente.

Estes sistemas geralmente são classificados em três grupos: sistemas *competitivos* (ou *cooperativos*), sistemas *conservativos* e sistemas *dissipativos*. Dentro da classe dos sistemas dissipativos podem-se considerar os sistemas *estavelmente dissipativos*, que se caracterizam por serem sistemas dissipativos e que por perturbações suficientemente pequenas mantêm as suas propriedades.

O presente trabalho foca-se essencialmente nos sistemas dissipativos, nomeadamente no estudo de propriedades e exemplos de sistemas estavelmente dissipativos. Procura-se explorar um algoritmo desenvolvido nos anos 1980 por Redheffer *et al.* que actua no grafo da matriz de interacção do sistema. Discutem-se algumas ideias relacionadas com a dinâmica deste tipo de sistemas, sendo apresentados alguns exemplos ilustrativos.

**Palavras-chave:** Sistema Lotka-Volterra, equação diferencial, sistema dinâmico, sistema conservativo, sistema dissipativo, sistema estavelmente dissipativo, atractor.





# Abstract

Lotka-Volterra systems were introduced in the 1920s by Lotka and Volterra independently of one another when they began to publish studies on systems of differential equations in areas of chemistry and interaction of populations, respectively.

These systems are generally classified into three groups: *competitive (or cooperative)* systems, *conservative* systems and *dissipative* systems. Within the class of dissipative systems can be considered the *stably dissipative* systems, which are characterized by being dissipative systems that maintain their properties even when disturbed.

The present work focuses mainly on dissipative systems, namely in the study of properties and examples of stably dissipative systems. We attempt to explore an algorithm developed in 1980 by Redheffer *et al.* acting in the graph of the interaction matrix system. Finally we discuss some ideas related to the dynamics of such systems and present some examples.

**Key-words:** Lotka-Volterra system, differential equation, dynamical system, conservative system, dissipative system, stably dissipative system, attractor.



# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Equações Diferenciais e Sistemas Dinâmicos</b>	<b>3</b>
1.1 Sistema Dinâmico . . . . .	3
1.2 Campos Vectoriais e Soluções de Equações Diferenciais . . . .	4
1.3 Fluxo de uma Equação Diferencial . . . . .	7
1.4 Sistemas Lineares . . . . .	8
1.5 Pontos Fixos e sua Estabilidade . . . . .	9
1.6 Funções de Liapunov . . . . .	12
<b>2 Sistemas Lotka-Volterra</b>	<b>16</b>
2.1 Sistema Predador-Presa . . . . .	17
2.2 Sistema Lotka-Volterra para $n$ Populações . . . . .	21
2.3 Noções Básicas . . . . .	23
2.4 Sistemas Conservativos . . . . .	26
2.5 Sistemas Dissipativos . . . . .	31
2.6 Folheações Invariantes . . . . .	36
<b>3 Sistemas Lotka-Volterra Estavelmente Dissipativos</b>	<b>41</b>
3.1 Matrizes Estavelmente Dissipativas . . . . .	42
3.2 Redução da Dinâmica . . . . .	49
3.3 Característica do Grafo . . . . .	54
3.4 Discussão e Exemplos . . . . .	56
<b>Bibliografia</b>	<b>77</b>



# Introdução

Os sistemas Lotka-Volterra foram introduzidos por volta dos anos 1920, por Lotka e Volterra, de forma independente um do outro, quando começaram a publicar estudos sobre sistemas de equações diferenciais em áreas da química e da interacção de populações, respectivamente. Desde então estes sistemas têm sido largamente estudados em áreas científicas tão diversas como a física, a química, a biologia, a economia ou as ciências sociais.

Os sistemas Lotka-Volterra geralmente são classificados em sistemas *competitivos* (ou *cooperativos*), sistemas *conservativos* ou sistemas *dissipativos*. Dentro da classe dos sistemas dissipativos podem-se considerar os sistemas estavelmente dissipativos, que se caracterizam por serem sistemas dissipativos que mantêm as suas características mesmo após sofrerem pequenas perturbações.

O presente trabalho, que se divide em três capítulos, foca-se essencialmente nos sistemas dissipativos, nomeadamente no estudo de propriedades e exemplos de sistemas estavelmente dissipativos. No primeiro capítulo apresentam-se alguns conceitos e resultados básicos da teoria dos sistemas dinâmicos e das equações diferenciais.

No segundo capítulo são apresentados os sistemas Lotka-Volterra. Inicialmente é abordado o sistema Predador-Presa, desenvolvido por Volterra para explicar a evolução da interacção Predador-Presa entre 2 populações. Em seguida faz-se a generalização dos sistemas Lotka-Volterra para  $n$  populações, com foco principal nos sistemas conservativos e nos sistemas dissipativos. Finalmente, na última secção apresenta-se o conceito de *folheação* e outros conceitos e resultados relacionados.

Finalmente, no terceiro capítulo, apresentam-se resultados relacionados com os sistemas estavelmente dissipativos. Na primeira secção apresentam-se re-

sultados que procuram caracterizar os sistemas estavelmente dissipativos em termos da sua matriz de interacção e do seu grafo associado. Na secção seguinte discute-se a dinâmica desta classe de sistemas através de um algoritmo que actua sobre o grafo da matriz associada. Na terceira secção apresenta-se essencialmente um resultado que estabelece a igualdade da característica de matrizes estavelmente dissipativas que partilham o mesmo grafo. Finalmente, na última secção discutem-se algumas ideias relacionadas com a dinâmica deste tipo de sistemas, sendo apresentados alguns exemplos ilustrativos.

Na generalidade, a tese foi escrita na terceira pessoa do singular. No entanto, algumas partes do texto, nomeadamente, as duas últimas secções do segundo e do terceiro capítulo, foram escritas na primeira pessoa do plural para evidenciar que são comentários e resultados desenvolvidos pelo autor e pelo seu orientador.

# Capítulo 1

## Equações Diferenciais e Sistemas Dinâmicos

Neste capítulo pretende-se formalizar alguma base teórica que serve como fundamento para o estudo dos sistemas Lotka-Volterra sob o ponto de vista da teoria dos Sistemas Dinâmicos. Desta modo, este primeiro capítulo divide-se em secções que abordam, de uma forma longe de ser exaustiva, os conceitos e resultados fundamentais da teoria das Equações Diferenciais e dos Sistemas Dinâmicos.

### 1.1 Sistema Dinâmico

Um sistema dinâmico é uma forma de descrever a passagem no tempo de todos os pontos de um dado espaço  $\mathcal{S}$ . O espaço  $\mathcal{S}$  pode ser visto, por exemplo, como o espaço de estados de uma sistema físico. Matematicamente,  $\mathcal{S}$  pode ser uma variedade. Neste texto, considera-se  $\mathcal{S}$  um aberto de um espaço Euclideano. Um sistema dinâmico em  $\mathcal{S}$  diz-nos onde cada  $x \in \mathcal{S}$  estará  $t$  unidades de tempo depois.

**Definição 1.1.1.** *Um **sistema dinâmico** é a acção de um semigrupo  $T$  num espaço  $\mathcal{S}$ , i.e, existe uma aplicação contínua*

$$\begin{aligned}\phi : T \times \mathcal{S} &\longrightarrow \mathcal{S} \\ (t, x) &\longrightarrow \phi_t(x)\end{aligned}$$

*que satisfaz:*



(a)  $\phi_0(x) = x$ ;

(b) e  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ , para cada  $t, s \in T$ .

Se  $T$  é um grupo, o sistema dinâmico diz-se **invertível**.

Geralmente os sistemas dinâmicos dizem-se **discretos** se

$$T = \mathbb{N}_0 \quad \text{ou} \quad T = \mathbb{Z}$$

e dizem-se **contínuos** se

$$T = \mathbb{R}_+ \quad \text{ou} \quad T = \mathbb{R}.$$

No caso dos sistemas dinâmicos contínuos, se  $T = \mathbb{R}$  o sistema dinâmico pode-se dizer um **fluxo**, e no caso de  $T = \mathbb{R}_+$  pode-se dizer um **semifluxo**.

**Definição 1.1.2.** Para cada  $x_0 \in \mathcal{S}$ , o conjunto

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x \in \mathcal{S} : x = \phi_t(x_0), t \in T\}$$

diz-se a **órbita** do ponto  $x_0$ .

Se  $T = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{N}_0$  o conjunto  $\mathcal{O}(x_0)$  não é mais do que uma sucessão discreta de pontos em  $\mathcal{S}$ , enquanto que se  $T = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}_+$ , uma órbita representa uma curva em  $\mathcal{S}$ .

## 1.2 Campos Vectoriais e Soluções de Equações Diferenciais

Considere-se, ao longo deste texto,  $E$  um espaço vectorial de dimensão finita.

Seja  $A$  um operador definido em  $E$ . Considere-se  $\mathcal{S} = E$  e  $\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$  uma aplicação definida por  $\phi(t, x) = e^{tA}x$ . Deste modo,  $\phi_t : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$  pode ser representado por  $\phi_t = e^{tA}$ . Tem-se que  $\phi_0 = e^0$  é o operador identidade e como  $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$ , tem-se definido um sistema dinâmico em  $E$ .

Este exemplo de sistema dinâmico está relacionado com a equação diferencial  $\frac{dx}{dt} = Ax$  em  $E$ . Um sistema dinâmico  $\phi_t$  em  $\mathcal{S}$  geralmente dá origem a uma equação diferencial em  $\mathcal{S}$ , por sua vez associado a um **campo vectorial** em  $\mathcal{S}$ ,  $f : \mathcal{S} \longrightarrow E$ . Suponha-se  $\mathcal{S}$  um aberto de  $E$ . Dado  $\phi_t$ ,  $f$  define-se por

$$f(x) = \frac{d}{dt}\phi_t(x)|_{t=0}, \quad (1.1)$$

donde, para  $x \in \mathcal{S}$ ,  $f(x)$  é um vector em  $E$ , o qual pode ser visto como o vector tangente à curva  $t \mapsto \phi_t(x)$  em  $t = 0$ .

Se  $\phi_t : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$  é um sistema dinâmico e  $x \in \mathcal{S}$ , considere-se  $x(t) = \phi_t(x)$  e  $f : \mathcal{S} \longrightarrow E$  definido como em (1.1). Então pode-se reescrever (1.1) como

$$x' = f(x). \quad (1.2)$$

Deste modo,  $x(t)$  ou  $\phi_t(x)$  representam a *curva solução* de (1.2) que satisfaz a condição inicial  $x(0) = x$ . Uma curva solução também se pode designar por *trajectória* ou *órbita* da equação diferencial. Existe um processo recíproco a este descrito: dada uma equação diferencial tem-se associado a esta um sistema dinâmico se estiver definido para todo o  $t$ .

A equação (1.2) diz-se uma equação **autónoma**. Isto significa que a função  $f$  não depende do tempo. Pode-se também considerar uma função  $f : I \times M \longrightarrow E$  de classe  $C^1$  onde  $I \subseteq \mathbb{R}$  é um intervalo e  $M$  é um aberto do espaço vectorial  $E$ . Neste caso escreve-se

$$x' = f(t, x) \quad (1.3)$$

e (1.3) diz-se uma equação diferencial **não autónoma**.

Considere-se  $E$  um espaço vectorial normado,  $M \subseteq E$  um aberto e  $f : M \longrightarrow E$  uma aplicação contínua. Suponha-se que a função  $u : J \longrightarrow M$  definida em algum intervalo  $J \subseteq \mathbb{R}$  é diferenciável e que satisfaz

$$u'(t) = f(u(t)), \quad \forall t \in J. \quad (1.4)$$

Nestas condições  $u$  diz-se uma **solução** da equação diferencial (1.2).

Geometricamente,  $u$  é uma curva em  $E$  cujo vector tangente  $u'(t)$  é igual a  $f(u(t))$ . A aplicação  $f : M \longrightarrow E$  é um campo vectorial em  $M$ . Pode-se pensar na solução  $u$  como a trajectória de uma partícula que se move em  $E$  tal que no tempo  $t$ , o seu vector tangente (ou velocidade) é dado pelo valor do campo vectorial na posição da partícula.

Diz-se que uma condição da forma  $u(t_0) = x_0$ , com  $t_0 \in J$  e  $x_0 \in M$ , é uma **condição inicial** para a solução  $u : J \longrightarrow M$ .

Apresenta-se em seguida o Teorema fundamental de existência e unicidade de solução local para equações diferenciais ordinárias. Este teorema diz-se “local” na medida em que diz respeito à natureza do campo vectorial  $f : M \longrightarrow E$  na vizinhança de um ponto  $x_0$  de  $M$ .

**Teorema 1.2.1.** *Sejam  $M \subseteq E$  um aberto de  $E$ ,  $f : M \longrightarrow E$  uma função de classe  $C^1$  (i.e., continuamente diferenciável) e  $x_0 \in M$ . Então, existe  $a > 0$  real e uma única solução*

$$u : ] - a, a[ \longrightarrow M$$

*da equação diferencial*

$$x' = f(x)$$

*que satisfaz a condição inicial*

$$x(0) = x_0.$$

Observe-se que neste caso se considera  $t_0 = 0$ , sendo esta identificação frequente no contexto das equações autónomas. Uma demonstração deste teorema pode ser vista em [9].

Pelo Lema 1.2.2 (enunciado a seguir) tem-se que as soluções definidas em quaisquer dois dos intervalos da união de todos os intervalos que contêm 0 são iguais na intersecção entre eles, donde existe uma solução definida em todo o intervalo  $]\alpha, \beta[$ .

**Lema 1.2.2.** *Seja  $f : M \longrightarrow E$  uma função de classe  $C^1$ . Suponha-se que  $u(t)$  e  $v(t)$  são duas soluções de  $x' = f(x)$  definidas no mesmo intervalo aberto  $J$  que contém  $t_0$  e tal que  $u(t_0) = v(t_0)$ . Então  $u(t) = v(t)$  para todo o  $t \in J$ .*

Uma demonstração deste lema pode ser vista em [9].

Considerando a equação diferencial (1.2) onde  $f$  é uma função de classe  $C^1$  definida num aberto  $M \subseteq E$ , pelo Lema 1.2.2 tem-se que para cada  $x_0 \in E$  existe um *intervalo máximo aberto*  $]\alpha, \beta[$  que contém  $t_0$ , no qual está definida uma solução  $x(t) = x_0$ .  $]\alpha, \beta[$  é dado pela união de todos os intervalos abertos que contêm 0 e para os quais está definida uma solução que satisfaz a condição inicial  $x(0) = x_0$ . Pode-se ter o caso de  $\alpha = -\infty$  e  $\beta = +\infty$ .

### 1.3 Fluxo de uma Equação Diferencial

Considere-se a equação diferencial (1.2), definida por uma função  $f : M \longrightarrow E$  de classe  $C^1$  com  $M \subseteq E$  aberto. Para cada  $x_0 \in E$  existe uma única solução  $\phi(t)$  definida num intervalo maximal aberto  $J_{x_0} \subseteq \mathbb{R}$  que contém  $t_0$  e tal que  $\phi(t_0) = x_0$ . Para indicar a dependência de  $\phi(t)$  de  $x_0$ , escreve-se

$$\phi(t) = \phi(t, x_0).$$

Considerando  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times M$  o conjunto

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M : t \in J_x\},$$

a função  $\phi : \Omega \longrightarrow M$  definida por  $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$  diz-se o **fluxo** da equação (1.2) ou do campo.

Provam-se as seguintes proposições relativamente à função  $\phi$ , cujas demonstrações se podem ver em [9].

**Teorema 1.3.1.** *O fluxo  $\phi : \Omega \longrightarrow M$  de uma equação diferencial é um fluxo local no sentido em que:*

- (a)  $\{0\} \times M \subseteq \Omega$  e  $\phi_0(x) = x$ ,
- (b) se  $(t, x) \in \Omega$ , então  $(s, \phi_t(x)) \in \Omega \iff (s + t, x) \in \Omega$ , e  $\phi_t(\phi_s(x)) = \phi_{t+s}(x)$
- (c)  $\Omega$  é um aberto de  $\mathbb{R} \times M$ ,
- (d)  $\phi : \Omega \longrightarrow M$  é contínua.

Neste sentido veja-se a seguinte definição.

**Definição 1.3.2.** *O campo diz-se completo se  $\Omega = \mathbb{R} \times M$  e diz-se semi-completo se  $\Omega \supseteq \mathbb{R}_+ \times M$ . Analogamente,  $\phi_t(x)$  diz-se um **fluxo completo** se  $\Omega = \mathbb{R} \times M$  e diz-se um **semifluxo completo** se  $\mathbb{R}_+ \times M \subset \Omega$ .*

Como consequência tem-se então o seguinte Corolário do Teorema 1.3.1.

**Corolário 1.3.3.** *Seja  $U$  um aberto de  $M$  tal que  $\{t\} \times U \subset \Omega$ . A aplicação  $\phi_t$  aplica sobrejectivamente  $U$  num aberto  $V$  e a aplicação  $\phi_{-t}$  está definida em  $V$  e aplica sobrejectivamente  $V$  em  $U$ . A composição  $\phi_{-t} \circ \phi_t$  é a aplicação identidade de  $U$  e  $\phi_t \circ \phi_{-t}$  a aplicação identidade de  $V$ .*

O seguinte Teorema, que resulta da maximalidade do fluxo  $\phi$ , i.e, das soluções  $\phi_t(x)$  com  $t \in J_x$ , dá-nos uma condição suficiente para que o fluxo (campo) seja semi-completo.

**Teorema 1.3.4.** *Seja  $\phi$  o fluxo do campo  $f$ . Se para todo o  $x_0 \in M$ , existe um compacto  $K \subset M$  com  $x_0 \in K$  tal que para todo o  $(t, x_0) \in \Omega$  e  $t \geq 0$ ,  $\phi_t(x_0) \in K$ , então  $f$  é semicompleto.*

As definições de campo e fluxo podem ser realizadas no contexto do produto cartesiano, como se pode ver nas definições seguintes.

**Definição 1.3.5.** *Considere-se  $f_i : \mathcal{S}_i \longrightarrow E_i$  em que  $\mathcal{S}_i$  um aberto do espaço vectorial  $E_i$  para  $i \in \{1, \dots, m\}$ . A aplicação*

$$f : \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_m \longrightarrow E_1 \times \dots \times E_m$$

*definida por*

$$f(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1), \dots, f_m(x_m))$$

*diz-se um **campo vectorial produto**.*

**Definição 1.3.6.** *Se  $\phi_t^i : \mathcal{S}_i \longrightarrow \mathcal{S}_i$  é um fluxo para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ , a aplicação*

$$\phi_t : \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_m \longrightarrow \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_m$$

*definida por*

$$\phi_t(x_1, \dots, x_m) = (\phi_t^1(x_1), \dots, \phi_t^m(x_m)),$$

*diz-se um **fluxo produto**, (i.e, produto cartesiano de fluxos).*

**Observação 1.3.7.** *No sentido da definição 1.3.6, observe-se que o fluxo de um campo vectorial produto é o produto dos fluxos.*

## 1.4 Sistemas Lineares

Considere-se o sistema linear de primeira ordem autónomo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

onde  $A$  é uma matriz real  $n \times n$  com coeficientes constantes,  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\dot{x}(t)$  representa a derivada de  $x(t)$  em ordem ao tempo  $t$ .

Da teoria das equações diferenciais, sabe-se que toda a solução do problema (1.5) se escreve como combinação linear de termos do tipo  $p(t)e^{\alpha t}$ , onde  $\alpha = a + ib$  é um valor próprio de  $A$  e  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função polinomial. Como  $e^{\alpha t}$  decresce mais rapidamente do que qualquer potência de  $t$ , a solução irá convergir para 0 se  $a = \operatorname{Re}(\alpha) < 0$ . Se  $a = 0$ ,  $e^{\alpha t} = e^{ibt}$  ficará limitada e os termos polinomiais irão divergir. Contudo, se a condição inicial estiver na direcção do vector próprio associado ao valor próprio  $\alpha$ , os termos polinomiais não se irão manifestar. Resumindo,

**Teorema 1.4.1.** *Uma solução do sistema linear (1.5) converge para 0 quando  $t \rightarrow +\infty$  se a condição inicial  $x_0$  se encontrar no subespaço gerado pelos subespaços generalizados associados aos valores próprios com parte real negativa.*

*A solução permanecerá limitada se  $x_0$  se encontrar no subespaço gerado pelos subespaços generalizados associados aos valores próprios com parte real negativa mais os subespaços correspondentes aos valores próprios com parte real nula.*

Observe-se que no Teorema anterior, substituindo *negativa* por *positiva*, se obtém o comportamento das soluções quando  $t \rightarrow -\infty$ .

**Definição 1.4.2.** *Um sistema linear diz-se **estável** se todas as soluções se mantêm limitadas quando  $t \rightarrow +\infty$  e diz-se **assintoticamente estável** se todas as soluções convergem para 0 quando  $t \rightarrow +\infty$ .*

**Corolário 1.4.3.** *O sistema linear (1.5) é estável se para todos os valores próprios  $\alpha$  de  $A$ ,  $\operatorname{Re}(\alpha) \leq 0$  e para os valores próprios em que  $\operatorname{Re}(\alpha) = 0$  as suas multiplicidades algébricas e geométricas são iguais.*

*O sistema linear (1.5) é assintoticamente estável se todos os valores próprios de  $A$  têm parte real negativa.*

Demonstrações destes resultados podem ser encontradas, por exemplo, em [9].

## 1.5 Pontos Fixos e sua Estabilidade

Nesta secção procura-se dar a ideia fundamental de *estabilidade de um ponto de equilíbrio* de um sistema dinâmico. De um modo geral, pode-se dizer que

um ponto de equilíbrio  $x_e$  (cuja definição se dará a seguir) é **estável** se todas as soluções próximas de  $x_e$  se mantêm próximas ao longo do tempo e que é **assintoticamente estável** se todas as soluções próximas de  $x_e$  não só se mantêm próximas, como tendem mesmo para  $x_e$ .

**Definição 1.5.1.** *Considerando a equação diferencial*

$$x' = f(x), \quad (1.6)$$

sendo  $f : M \longrightarrow E$  uma função de classe  $C^1$  e  $M \subseteq E$  aberto,  $x_e$  diz-se um **ponto de equilíbrio** de (1.6) se  $f(x_e) = 0$ .

Verifica-se facilmente que a função constante  $x(t) = x_e$  é uma solução de (1.6). Pela unicidade das soluções, tem-se que nenhuma outra curva solução pode passar por  $x_e$ . Se  $M$  é o espaço de estados de um determinado sistema físico (ou biológico, ou económico, ou outro) descrito por (1.6), então  $x_e$  é um “estado de equilíbrio”.

Seja  $\phi : \Omega \longrightarrow M$  o fluxo associado à equação diferencial (1.6),  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times M$  um aberto e para cada  $x \in M$  a aplicação  $t \mapsto \phi_t(x)$ , definida num intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  que contém 0, a solução que passa por  $x$  quando  $t = 0$ . Se  $x_e$  é um ponto de equilíbrio, então  $\phi_t(x_e) = x_e$  para todo o  $t \in \mathbb{R}$ . Por esta razão,  $x_e$  diz-se também um **ponto estacionário** ou um **ponto fixo** do fluxo. Pode-se ainda dizer que  $x_e$  é um **zero** ou um **ponto singular** do campo vectorial  $f$ .

Suponha-se que  $f$  é uma função linear definida por  $f(x) = Ax$ , onde  $A$  é um operador linear em  $\mathbb{R}^n$ . Neste caso considera-se  $M = \mathbb{R}^n$ . Tem-se que a origem  $0 \in \mathbb{R}^n$  é um ponto fixo de (1.6). Verifica-se que quando  $\lambda < 0$  é maior do que as partes reais dos valores próprios de  $A$ , as soluções  $\phi_t(x)$  aproximam-se de 0 exponencialmente, i.e.,

$$\|\phi_t(x)\| \leq Ce^{\lambda t},$$

para alguma constante  $C > 0$ .

Suponha-se agora que  $f$  é um campo vectorial de classe  $C^1$  (não necessariamente linear) com  $0 \in \mathbb{R}^n$  um ponto fixo. Pode-se ver a derivada  $Df(0) = A$  de  $f$  em 0 como um campo vectorial linear que se aproxima de  $f$  numa vizinhança de 0, designando-se esta pela *parte linear* de  $f$  em 0. Se todos os valores próprios de  $Df(0)$  têm parte real negativa, 0 diz-se um ponto **atractivo**. Mais geralmente, diz-se que um ponto fixo  $x_e$  é **atractivo** se

todos os valores próprios de  $Df(x_e)$  têm parte real negativa.

O teorema que se vai ver em seguida, diz-nos que um ponto atractivo  $x_e$  de um sistema não linear, localmente se comporta como um ponto atractivo de um sistema linear, donde, as soluções suficientemente próximas tendem para  $x_e$  exponencialmente.

**Teorema 1.5.2.** *Seja  $x_e \in M$  um ponto atractivo da equação (1.6). Suponha-se que todos os valores próprios de  $Df(x_e)$  têm parte real menor que  $-c$ , com  $c > 0$  constante. Então, existe uma vizinhança  $U \subset M$  de  $x_e$  tal que*

(a)  $\phi_t(x)$  está definida e em  $U$  para todo o  $x \in U$  e  $t > 0$ ,

(b) existe uma constante  $B > 0$  tal que

$$\|\phi_t(x) - x_e\| \leq B e^{-tc} \|x - x_e\|, \quad \forall x \in U, t \geq 0,$$

com  $\|\cdot\|$  a norma Euclideana em  $\mathbb{R}^n$ .

Em particular,  $\phi_t(x) \rightarrow x_e$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , para todo o  $x \in U$ .

Uma demonstração deste teorema pode ser vista em [9].

Uma questão muito importante no estudo dos sistemas dinâmicos é perceber o comportamento a longo prazo do próprio sistema. Em particular, pretende-se saber quando é que determinada solução do sistema é estável ou não. Geralmente, olha-se para um ponto fixo e procura-se saber o que acontece a uma solução que comece próxima dele. Apresentam-se então as definições seguintes.

**Definição 1.5.3.** *Um ponto fixo  $x_e$  da equação diferencial (1.6) diz-se **estável** se para qualquer vizinhança  $U$  de  $x_e$  existe outra vizinhança  $U_1 \subseteq U$  tal que toda a solução  $x(t)$  que começa em  $x(0) \in U_1$  está definida e em  $U$  para todo o  $t \geq 0$ .*

**Definição 1.5.4.** *Um ponto fixo  $x_e$  da equação diferencial (1.6) diz-se **assintoticamente estável** se é estável e se existe uma vizinhança  $U$  de  $x_e$  tal que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e$ , para todo o  $x(t)$  que começa em  $x(0) \in U$ .*

Usando uma linguagem mais habitual em Sistemas Dinâmicos diz-se, com o mesmo sentido, que  $x_e$  é um ponto fixo *atractivo*.

Um ponto fixo  $x_e$  que não é estável diz-se **instável**. Isto significa que existe uma vizinhança  $U$  de  $x_e$  tal que para toda a vizinhança  $U_1$  de  $x_e$  em  $U$  existe pelo menos uma solução  $x(t)$  que começa em  $x(0) \in U_1$  e não permanece inteiramente em  $U$ .



**Teorema 1.5.5.** *Seja  $M \subseteq E$  um aberto e  $f : M \longrightarrow E$  uma função de classe  $C^1$ . Suponha-se que  $x_e$  é um ponto fixo estável da equação diferencial (1.6). Então, nenhum valor próprio de  $Df(x_e)$  tem parte real positiva (i.e., todos os valores próprios têm parte real  $\leq 0$ ).*

Uma demonstração deste teorema pode ser vista em [9].

**Definição 1.5.6.** *Diz-se que um ponto fixo  $x_e$  é **hiperbólico** se a derivada  $Df(x_e)$  não tem valores próprios com parte real nula (i.e., todos os valores próprios têm parte real diferente de 0).*

Pode então ver-se que das definições e do Teorema 1.5.5 se tem o Corolário seguinte.

**Corolário 1.5.7.** *Um ponto fixo hiperbólico pode ser instável ou assintoticamente estável.*

No caso não linear, dado um ponto fixo hiperbólico  $x_e$  do sistema dinâmico definido por  $x' = f(x)$ , tem-se que os valores próprios de  $Df(x_e)$  têm parte real não nula. Se todos os valores próprios têm parte real negativa,  $x_e$  diz-se um ponto **atractivo**. Se têm todos parte real positiva,  $x_e$  diz-se um ponto **repulsivo**. Se existem valores próprios com parte real positiva e outros com parte real negativa, então  $x_e$  diz-se um ponto de **sela**. Assim, pelo Teorema 1.5.5, verifica-se claramente que um ponto de sela é instável.

## 1.6 Funções de Liapunov

Na secção anterior definiu-se a estabilidade e a estabilidade assintótica de um ponto fixo de um sistema dinâmico. Viu-se que se  $x_e$  é um ponto atractivo, a sua estabilidade pode ser inferida através da análise dos valores próprios da parte linear  $Df(x_e)$ . Para além de se descobrirem todas as soluções da equação diferencial, se tal for possível, é difícil determinar a estabilidade do sistema.

Em 1982, o matemático e engenheiro russo Liapunov, descreveu na sua tese de doutoramento um critério muito útil para se averiguar a estabilidade. Nomeadamente, Liapunov mostrou que se podem usar determinadas funções para garantir a estabilidade de um sistema.

Considere-se  $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável definida numa vizinhança  $U \subset M \subseteq \mathbb{R}^n$  de  $x_e$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função. Nota-se por  $\dot{V} : U \longrightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$\dot{V}(x) = DV(x)(f(x)),$$

onde o lado direito da expressão representa o operador  $DV(x)$  aplicado ao vector  $f(x)$ . Então, se  $\phi_t(x)$  é solução do sistema de equações diferenciais

$$x' = f(x) \tag{1.7}$$

e que passa por  $x$  quando  $t = 0$ , tem-se

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(\phi_t(x))|_{t=0},$$

pois

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\phi_t(x)) &= DV(\phi_t(x))\left(\frac{d}{dt}(\phi_t(x))\right) \\ &= DV(\phi_t(x))(f(\phi_t(x))) \\ &= \dot{V}(\phi_t(x)). \end{aligned}$$

Consequentemente, se  $\dot{V}(x)$  é um função sempre negativa, tem-se que  $V$  decresce ao longo da solução de (1.7) que passa por  $x$ .

Veja-se em seguida o Teorema da estabilidade de Liapunov.

**Teorema 1.6.1.** *Seja  $x_e \in M$  um ponto fixo da equação diferencial (1.7). Seja  $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua definida numa vizinhança  $U \subset M$  de  $x_e$ , diferenciável em  $U \setminus \{x_e\}$ , e tal que*

$$(a) \quad V(x_e) = 0 \text{ e } V(x) > 0, \quad \text{para todo } x \in U \setminus \{x_e\},$$

$$(b) \quad \dot{V}(x) \leq 0, \quad \text{para todo } x \in U \setminus \{x_e\}.$$

*Então  $x_e$  é estável. Mais, se*

$$(c) \quad \dot{V}(x) < 0, \quad \text{para todo } x \in U \setminus \{x_e\},$$

*então  $x_e$  é assintoticamente estável.*

Uma função  $V$  que satisfaz as condições (a) e (b) do Teorema, diz-se uma **função de Liapunov** para (1.7). Se adicionalmente satisfaz a condição (c), diz-se uma função de Liapunov estrita, devendo neste caso,  $x_e$  ser um ponto

fixo isolado.

Uma importância significativa do Teorema de Liapunov é que este pode ser aplicado sem que se resolva a equação diferencial. No entanto, não existe um método simples e directo de encontrar funções de Liapunov, sendo basicamente um método de tentativa e erro para cada caso, ainda que por vezes existam funções que são naturais de experimentar. Por exemplo, nos casos de sistemas mecânicos ou eléctricos, a energia é frequentemente uma função de Liapunov.

Considere-se agora o sistema autónomo de equações diferenciais

$$x' = f(x), \quad (1.8)$$

com  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  função contínua definida em  $M$  aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Considere-se ainda  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$  função de Liapunov para (1.8). Defina-se

$$L = \{x \in M : \dot{V}(x) = 0\}$$

e seja  $N$  o conjunto de todas as soluções de (1.8) que permanecem em  $L$  no seu intervalo maximal de definição.

**Definição 1.6.2.** *Uma função  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **própria** se, para todo o  $K \subseteq \mathbb{R}$  compacto,  $g^{-1}(K)$  também é compacto.*

Tendo por base o Teorema de LaSalle [13], tem-se o seguinte resultado.

**Teorema 1.6.3.** *Seja  $\phi_t : \mathbb{R}_+ \times M \rightarrow M$  um semifluxo completo associado a (1.8) e seja  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$  função de Liapunov própria. Então, para todo o  $x_0 \in M$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x_0) \in N$ .*

Observe-se que este Teorema é consequência do Teorema 1.3.4.

**Definição 1.6.4.** *Define-se o conjunto  $\omega$ -**limite** de  $x$  como*

$$\omega(x) := \{y \in M : \text{existe uma sucessão } t_n \rightarrow +\infty \text{ tal que } \phi_{t_n}(x) \rightarrow y\}$$

*e o conjunto  $\alpha$ -**limite** de  $x$  como*

$$\alpha(x) := \{y \in M : \text{existe uma sucessão } t_n \rightarrow -\infty \text{ tal que } \phi_{t_n}(x) \rightarrow y\}.$$

Partindo do facto que para sistemas autónomos os conjuntos limite têm uma propriedade de invariância, o Teorema enunciado diz que uma função de Liapunov em  $M$  dá informação sobre todos os conjuntos limite positivos de soluções que permanecem em  $M$  (que conforme a definição 1.6.4, correspondem aos conjuntos  $\omega$ -limite).

**Definição 1.6.5.** *O conjunto  $U$  diz-se um **atractor** se existir uma vizinhança  $W$  de  $U$  tal que  $x_0 \in W$  implica que  $\phi_t(x_0) \rightarrow U$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , para cada solução  $\phi_t(x_0)$ .*

*O conjunto  $U$  diz-se um **atractor global** se para todo o  $x_0 \in M$  implica que  $\phi_t(x_0) \rightarrow U$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , para cada solução  $\phi_t(x_0)$ .*

**Definição 1.6.6.** *O ponto fixo  $x_e$  diz-se **globalmente atractivo** se para todo o  $x_0 \in M$  implica que  $\phi_t(x_0) \rightarrow x_e$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , para cada solução  $\phi_t(x_0)$ .*

## Capítulo 2

# Sistemas Lotka-Volterra

Por volta dos anos 1920, Lotka [14] e Volterra [25], independentemente um do outro, começaram a publicar os seus estudos sobre sistemas de equações diferenciais, hoje designados por Sistemas Lotka-Volterra em sua homenagem, em áreas de estudo de reacções químicas autocatalíticas e de interacção de populações, respectivamente. Os sistemas Lotka-Volterra (e suas generalizações) tornaram-se num modelo matemático muito utilizado por diversas áreas científicas, como a física, a química, a biologia, a teoria de jogos da evolução, a economia e diversas áreas das ciências sociais. Mais especificamente, estes sistemas desempenham um papel fundamental no estudo de redes neuronais, reacções bioquímicas, evolução celular, gestão de recursos e epidemiologia.

Apesar de se poder analisar completamente a dinâmica dos sistemas Lotka-Volterra em dimensão 2, relativamente aos sistemas em dimensões superiores, o estudo da sua dinâmica está longe de ser totalmente compreendido, ainda que algumas classes especiais destes sistemas tenham sido largamente estudadas.

Este capítulo divide-se em seis secções. Na primeira secção faz-se a caracterização dos sistemas Predador-Presa e dão-se algumas propriedades básicas destes sistemas, fazendo-se a sua generalização para  $n$  populações na secção seguinte.

Na terceira secção dão-se uma série de noções básicas associadas aos sistemas Lotka-Volterra, fazendo-se a caracterização dos sistemas conservativos e dos sistemas dissipativos, nas secções quatro e cinco, respectivamente.

Por fim, na última secção, apresenta-se o conceito de folheação e outros conceitos e resultados relacionados.

## 2.1 Sistema Predador-Presa

Hofbauer e Sigmund [10] contam que nos anos mais próximos a seguir à Primeira Guerra Mundial a quantidade de peixes predadores no mar Adriático era consideravelmente maior do que nos anos anteriores. Ainda que as hostilidades entre a Áustria e a Itália tivessem afectado negativamente a pesca industrial, porque é que isso teria favorecido os predadores e não as presas? Esta foi uma questão que foi colocada a Volterra, que exprimindo-a de forma matemática procurou encontrar a respectiva resposta. Designou por  $x$  a densidade populacional dos peixes presas, por  $y$  a densidade populacional dos peixes predadores e construiu uma equação diferencial, procurando assim explicar o aumento dos predadores.

Volterra assumiu que a taxa de crescimento da população presa, na ausência de predadores, é dada por uma constante  $a$ , mas decresce linearmente em função da densidade  $y$  de predadores. Donde se tem  $\frac{\dot{x}}{x} = a - by$ , com  $a, b > 0$ . Na ausência de presas, os peixes predadores morrem por falta de alimento, o que significa uma taxa de crescimento negativa, mas esta taxa aumenta com a densidade populacional  $x$  do peixe presa, donde  $\frac{\dot{y}}{y} = -c + dx$ , com  $c, d > 0$ . Tem-se assim o modelo matemático que Volterra designou por sistema Predador-Presa.

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(-c + dx). \end{cases} \quad (2.1)$$

Numa análise a este sistema de equações diferenciais, verifica-se facilmente a existência das seguintes três soluções:

- (i)  $x(t) = y(t) = 0$ ,
- (ii)  $x(t) = 0$ ,  $y(t) = y(0)e^{-ct}$ , para qualquer  $y(0) > 0$ ,
- (iii)  $y(t) = 0$ ,  $x(t) = x(0)e^{at}$ , para qualquer  $x(0) > 0$ .

Interpretando o significado destas soluções, tem-se que se a densidade de predadores ou presas for zero em algum momento, então será sempre zero.

Na ausência de presas, o que corresponde a  $x(t) = 0$ , os predadores vão-se extinguir, dado que  $y(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Na ausência de predadores, o que corresponde a  $y(t) = 0$ , a densidade de presas aumenta exponencialmente, pois  $x(t) \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . O crescimento exponencial de uma população para infinito é uma situação absurda pois, por exemplo, a disponibilidade de alimento é limitada. Inicialmente procurou-se contornar este tipo de limitação deste modelo incluindo um termo adicional que correspondia à competição dentro da espécie.

Às soluções (i), (ii) e (iii) correspondem três órbitas:

- (i) a origem  $(0, 0)$ , que é um ponto fixo,
- (ii) o semi-eixo positivo dos  $yy$ ,
- (iii) o semi-eixo positivo dos  $xx$ .

Estas três órbitas formam a fronteira do conjunto

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}.$$

Dado que as densidades das populações são não-negativas, deve apenas considerar-se a restrição do sistema (2.1) ao conjunto  $\mathbb{R}_+^2$ . Este conjunto é invariante para este sistema de equações diferenciais na medida em que qualquer solução que tenha início num ponto do conjunto, permanece dentro do conjunto para todo o tempo  $t$  em que o sistema esteja definido.

Fixando as constantes  $a, b, c, d > 0$ , este sistema tem um único ponto fixo  $F = (x_1, y_1)$  em  $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$  que satisfaz

$$\begin{cases} x_1(a - by_1) = 0 \\ y_1(-c + dx_1) = 0. \end{cases}$$

Como  $x_1 > 0$  e  $y_1 > 0$ , tem-se

$$\begin{cases} x_1 = \frac{c}{d} \\ y_1 = \frac{a}{b}. \end{cases}$$

O sinal de  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  depende de  $y$  ser maior ou menor que  $y_1$  e de  $x$  ser maior ou menor que  $x_1$ , respectivamente. Como se pode ver na figura 2.1 o espaço de fases é composto por órbitas periódicas em torno do ponto  $F$ , como se justifica em seguida.

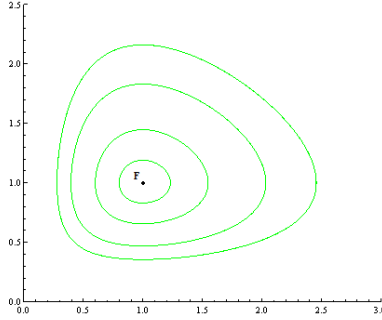


Figura 2.1: Espaço de fases de um sistema predador-presa em que  $(x_1, y_1) = (1, 1)$ .

Se no sistema (2.1) se multiplicar a primeira equação por  $\frac{c-dx}{x}$  e a segunda por  $\frac{a-by}{y}$  e depois se somar, obtém-se

$$\left(\frac{c}{x} - d\right)\dot{x} + \left(\frac{a}{y} - b\right)\dot{y} = 0$$

o que é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(c - \log x - dx + a \log y - by\right) = 0. \quad (2.2)$$

Considerando

$$H(x) = x_1 \log x - x, \quad G(y) = y_1 \log y - y,$$

e

$$V(x, y) = dH(x) + bG(y),$$

a equação (2.2) é equivalente a

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = 0,$$

donde

$$V(x(t), y(t)) = c.^{te}$$

o que significa que a função  $V$  permanece constante ao longo das órbitas do sistema (2.1).

Como  $H(x)$  satisfaz

$$\frac{dH}{dx} = \frac{x_1}{x} - 1 \quad \text{e} \quad \frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{x_1}{x^2} < 0,$$



tem-se que  $H$  atinge o seu máximo em  $x = x_1$ . Analogamente, se pode inferir que  $G$  atinge o seu máximo em  $y = y_1$ . Assim, pode-se concluir que  $V(x, y)$  atinge o seu único máximo no ponto fixo  $F = (x_1, y_1)$ . Os conjuntos de nível constantes  $\{(x, y) \in \text{int}(\mathbb{R}_+^2) : V(x, y) = c^{te}\}$  são curvas fechadas em torno do ponto  $F$ . As soluções permanecem nos conjuntos de nível constantes e assim retornam ao seu ponto inicial, donde se conclui que as órbitas são periódicas.

Pode-se assim verificar que a densidade de predadores e presas oscila periodicamente, com a amplitude e a frequência das oscilações dependendo das condições iniciais. Contudo, a média temporal das densidades mantém-se constante, i.e,

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = x_1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = y_1,$$

onde  $T$  é o período da solução. Ora veja-se que,

$$\frac{d}{dt}(\log x) = \frac{\dot{x}}{x} = a - by,$$

donde, integrando ambos os membros, se tem

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \log x(t) dt = \int_0^T (a - by(t)) dt,$$

ou seja,

$$\log x(T) - \log x(0) = aT - b \int_0^T y(t) dt.$$

Como  $x(T) = x(0)$ , tem-se

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{b} = y_1.$$

Analogamente, também se verifica o mesmo resultado para a média temporal de  $x(t)$ .

Pode-se então explicar o aumento da densidade populacional do peixe predador durante a guerra. Por um lado, a pesca reduz a taxa de crescimento populacional dos predadores, donde, em vez de  $a$  se tem uma constante menor  $a - k$ , com  $k > 0$ . Por outro lado, aumenta a taxa de decréscimo populacional das presas, donde, em vez de  $c$  se tem uma constante maior

$c + m$ , com  $m > 0$ . As constantes  $b$  e  $d$  não se alteram. A densidade de predadores é agora de  $\frac{a-k}{b}$ , e assim menor, e a das presas é de  $\frac{c+m}{d}$ , e assim maior. Pode-se então inferir que, deixar de pescar leva ao aumento populacional dos predadores e à diminuição populacional das presas.

## 2.2 Sistema Lotka-Volterra para $n$ Populações

Na sua obra “Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie” [25] Volterra iniciou o estudo do sistema de equações diferenciais

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t) \left( r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

onde  $x_i(t) \geq 0$  representa a densidade da população  $i$  no tempo  $t$  e  $r_i$  a sua taxa intrínseca de crescimento ou decaimento. Cada coeficiente  $a_{ij}$  representa o efeito da população  $j$  sobre a população  $i$ . Se  $a_{ij} > 0$  significa que a população  $j$  beneficia a população  $i$ , se  $a_{ij} < 0$  significa que a população  $j$  prejudica a população  $i$ .  $A = (a_{ij})$  diz-se a matriz de interacção do sistema (2.3).

O conjunto

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

diz-se o espaço de fases.

Existe uma relação muito próxima entre o estudo das propriedades dinâmicas de um sistema Lotka-Volterra e as propriedades algébricas da sua matriz de interacção. Normalmente os sistemas Lotka-Volterra do tipo (2.3) são classificados da seguinte forma:

**Definição 2.2.1.** *Um sistema Lotka-Volterra com matriz de interacção  $A = (a_{ij})$  diz-se.*

- (a) **cooperativo** (resp. **competitivo**) se  $a_{ij} \geq 0$  (resp.,  $a_{ij} \leq 0$ ) para todo  $i \neq j$ ;
- (b) **conservativo** se existe uma matriz diagonal  $D > 0$  tal que  $AD$  é anti-simétrica;

(c) **dissipativo** se existe uma matriz diagonal  $D > 0$  tal que, no sentido das formas quadráticas,  $AD \leq 0$ .

**Observação 2.2.2.** Quando se escreve  $AD \leq 0$  (respectivamente,  $AD < 0$ ) pretende-se dizer que  $AD$  é uma matriz semidefinida negativa (respectivamente, definida negativa) no sentido das formas quadráticas, o que é equivalente a dizer que a matriz simétrica  $AD + DA^T$  é semidefinida negativa (respectivamente, definida negativa), i.e.,  $AD + DA^T \leq 0$  (respectivamente,  $AD + DA^T < 0$ ).

**Observação 2.2.3.** Verifica-se que em algumas referências bibliográficas a condição  $AD \leq 0$  da definição 2.2.1 é substituída pela condição  $DA \leq 0$ . Contudo, as duas condições são equivalentes, pois

$$\begin{aligned}
 AD \leq 0 &\iff \sum_{i,j=1}^n d_j a_{ij} x_i x_j \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\
 &\quad \Downarrow \\
 DA \leq 0 &\iff \sum_{i,j=1}^n d_i a_{ij} x_i x_j \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.
 \end{aligned}$$

Relativamente aos sistemas cooperativos e competitivos, resultados gerais foram obtidos por Smale [22] e Hirsch [7, 8], entre outros, como por exemplo, Zeeman [26, 27, 28], Van Den Driessche *et al.* [2], Hofbauer *et al.* [11], Smith [23] e Karakostas *et al.* [12]. Tipicamente estes sistemas têm um atractor global constituído por pontos fixos e ligações entre eles.

Quanto aos sistemas conservativos, as primeiras investigações são atribuídas a Volterra na medida em que efectuou uma caracterização Hamiltoniana no caso em que a matriz de interacção é anti-simétrica.

Ainda que os sistemas dissipativos tenham sido abordados no trabalho pioneiro de Volterra, esta classe de sistemas tem sido a menos estudada. Volterra definiu esta classe procurando uma generalização do sistema predador-presa. São referências fundamentais neste campo o livro de Volterra [25], o Teorema de LaSalle [13] e o trabalho de Redheffer *et al.* [19, 20, 18, 16, 17]. Especialmente em [16], Redheffer estabelece as condições para uma matriz ser dissipativa, e em [18], Redheffer *et al.* fazem uma descrição do atractor dos sistemas dissipativos. Guo *et al.* [5] estudaram as condições necessárias e suficientes para as quais as matrizes reais  $3 \times 3$  são dissipativas. Rocha Filho

*et al.* [21] apresentam um algoritmo numérico e um package para Maple para se obter a matriz  $D > 0$ , designada por multiplicador de Volterra, tal que  $AD \leq 0$ .

Ainda há um longo caminho a percorrer no estudo da dinâmica de sistemas Lotka-Volterra em dimensão maior que dois, nomeadamente, a compreensão da topologia das órbitas no espaço de fases. O Teorema seguinte, demonstrado por Oliva *et al.* [3] é um resultado importante neste sentido.

**Teorema 2.2.4.** *Considere-se o sistema Lotka-Volterra (2.3) restringido ao conjunto  $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Suponha-se que o sistema tem um ponto fixo e é estavelmente dissipativo. Então existe um atrator global e a dinâmica no atrator é hamiltoniana.*

Mais à frente na secção dos sistemas estavelmente dissipativos, será apresentada a definição formal de estavelmente dissipativo, no entanto, um sistema ser estavelmente dissipativo significa que é dissipativo e que todo o sistema “suficientemente próximo” também é dissipativo. Muito recentemente, Zhao e Luo [29] apresentaram uma classificação dos possíveis grafos das matrizes de interacção de sistemas estavelmente dissipativos em dimensão cinco e estudaram as suas diferentes dinâmicas.

Um dos objectivos principais de Volterra ao desenvolver o estudo destas equações diferenciais foi a “mecanização” da biologia. Procurando um princípio variacional do sistema, Volterra desenvolveu uma formulação hamiltoniana no caso em que a matriz de interacção é anti-simétrica, ainda que nessa situação se tenha o custo de duplicar a dimensão do sistema. Esta formulação hamiltoniana é a base da estrutura hamiltoniana referida no Teorema 2.2.4.

## 2.3 Noções Básicas

Vejam-se em seguida alguns conceitos e resultados básicos sobre os sistemas Lotka-Volterra em dimensão  $n$ .

Considerem-se constantes  $d_i \neq 0$  fixas. A mudança de variável dada por

$$y_i = \frac{1}{d_i} x_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

transforma o sistema Lotka-Volterra (2.3) com matriz de interacção  $A$  num novo sistema Lotka-Volterra com matriz de interacção  $AD$ ,

$$\dot{y}_i(t) = y_i(t) \left( r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} d_j y_j(t) \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.5)$$

em que  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ .

Assim, pode-se encarar a mudança de variável (2.4) como uma simetria de calibre do sistema. A escolha de uma matriz  $(a_{ij})$  representativa numa classe de equivalência para transformações de calibre é designada por escolha de calibre. Dado que no presente contexto se toma como espaço de fases o conjunto  $\mathbb{R}_+^n$ , apenas se consideram transformações de calibre com  $d_i > 0$  de modo a preservar o espaço de fases. Observe-se que as classes de sistemas Lotka-Volterra estabelecidas na Definição 2.2.1 são invariantes por uma transformação de calibre.

Muitas propriedades dos sistemas Lotka-Volterra podem ser expressas geometricamente em termos do seu grafo associado  $G(A, r)$ , que é construído a partir da matriz de interacção do sistema. Dada uma matriz  $A$  de um sistema Lotka-Volterra, o grafo associado  $G(A, r)$  é construído fazendo corresponder a cada espécie  $i$  um vértice  $\circ$  com a etiqueta  $r_i$  e desenha-se uma aresta a ligar o vértice  $i$  ao vértice  $j$  se  $a_{ij} \neq 0$  ou  $a_{ji} \neq 0$ .

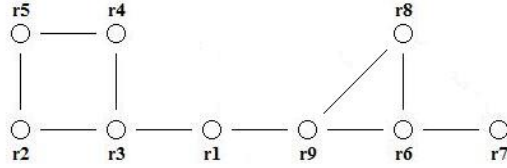


Figura 2.2: Exemplo do grafo  $G(A, r)$  associado de um sistema do tipo (2.3).

Por exemplo, se dois sistemas são equivalentes por uma transformação de calibre, então eles têm o mesmo grafo associado, não se verificando a situação recíproca, i.e., a dois grafos iguais podem corresponder dois sistemas diferentes. Os sistemas conservativos podem ser caracterizados em termos do seu grafo associado como se pode inferir pela seguinte proposição devida a Volterra [25].

**Proposição 2.3.1.** *Um sistema Lotka-Volterra com matriz de interação  $A = (a_{ij})$  é conservativo se, e só se,*

$$a_{ii} = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

$$a_{ij} \neq 0 \Rightarrow a_{ij}a_{ji} < 0, \quad \forall i \neq j,$$

e

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_s i_1} = (-1)^s a_{i_s i_{s-1}} \cdots a_{i_2 i_1} a_{i_1 i_s}, \quad (2.6)$$

para toda a sequência finita de inteiros  $(i_1, \dots, i_s)$ , com  $i_r \in \{1, \dots, n\}$  para  $r = 1, \dots, s$ .

Observe-se que a condição (2.6) significa que para cada caminho fechado no grafo com um número par (resp., ímpar) de vértices, o produto dos coeficientes das arestas quando se percorre o caminho num sentido é igual ao produto (resp., menos o produto) dos coeficientes das arestas quando se percorre o caminho no sentido inverso. Assim, por exemplo, um sistema que tenha o grafo associado dado pela figura 2.2 é conservativo se, e só se,

$$a_{68}a_{89}a_{96} = -a_{69}a_{98}a_{86},$$

$$a_{23}a_{34}a_{45}a_{52} = a_{25}a_{54}a_{43}a_{32},$$

e as condições  $a_{ii} = 0$  e  $a_{ij} \neq 0 \Rightarrow a_{ij}a_{ji} < 0$  são satisfeitas.

Os pontos fixos são claramente soluções triviais do sistema (2.3). Os pontos fixos  $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}_+^n$  do sistema (2.3) são as soluções do sistema linear

$$r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}q_j = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

A existência de um ponto fixo em  $\mathbb{R}_+^n$  está relacionado com o comportamento das órbitas em  $\mathbb{R}_+^n$ , conforme a proposição seguinte, demonstrada por Hofbauer e Sigmund [10] (ver também [3]).

**Proposição 2.3.2.** *Existe um ponto fixo  $q = (q_1, \dots, q_n)$  em  $\mathbb{R}_+^n$  do sistema (2.3) se, e só se,  $\mathbb{R}_+^n$  contém pontos  $\alpha$  ou  $\omega$ -limite.*

Pode-se assim verificar que o comportamento limite das órbitas está relacionado com a existência de pontos fixos. Por outro lado, o resultado seguinte mostra que a média temporal das órbitas está relacionada com os valores que a função toma nos pontos fixos.

**Proposição 2.3.3.** *Suponha-se que  $x(t)$  é uma órbita em  $\mathbb{R}_+^n$  do sistema (2.3) tal que  $0 < m \leq x_i(t) \leq M$  para todo o  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Então, existe uma sucessão  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $T_k \rightarrow +\infty$  e existe um ponto  $q \in \mathbb{R}_+^n$  tal que*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_k} \int_0^{T_k} x(t) dt = q.$$

*Mais, se o sistema (2.3) tem um único ponto fixo  $q \in \mathbb{R}_+^n$ , então*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = q.$$

A demonstração deste resultado pode ser vista em [3].

Observe-se que nos casos em que a matriz de interacção  $A = (a_{ij})$  não é invertível, o ponto fixo para o qual converge a média temporal de uma órbita depende do estado inicial.

**Observação 2.3.4.** *Considerando que  $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}_+^n$  é um ponto fixo do sistema (2.3), então este pode-se escrever como*

$$\dot{x} = x * A(x - q)$$

*onde a operação  $*$  representa a multiplicação componente a componente.*

## 2.4 Sistemas Conservativos

Os sistemas conservativos da mecânica clássica podem ser enquadrados no contexto da formulação hamiltoniana, cuja versão abstracta se baseia no conceito de estrutura simplética.

**Definição 2.4.1.** *Chama-se **estrutura simplética** a uma 2-forma (forma diferencial de grau 2)  $\omega$  que seja não degenerada e fechada.*

Uma estrutura simplética  $\omega$  definida num aberto  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  pode ser representada na forma

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j \quad (2.7)$$

tal que

- (1)  $x \mapsto A(x) = (a_{ij}(x))$  é função suave com valores num espaço de matrizes;
- (2)  $A(x)^T = -A(x)$ ;
- (3)  $A(x)$  é não singular ( $\omega$  é não degenerada);
- (4)  $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}(x) = 0$ , para todo o  $i < j < k$  ( $\omega$  é fechada,  $d\omega = 0$ ).

Dados  $u, v \in \mathbb{R}^n$  e  $x \in M$  a 2-forma (2.7) induz a seguinte forma bilinear antissimétrica

$$\omega_x(u, v) = u^T A(x) v.$$

Da não degenerescência de  $\omega$ , resulta que,

**Proposição 2.4.2.** *Dada uma função  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ , existe um único campo  $X$  em  $M$  tal que*

$$\omega_X(X(x), v) = DH_x(v), \quad \text{para todo o } x \in M, v \in \mathbb{R}^n.$$

**Definição 2.4.3.** *Nestas condições,  $X := X_H$  diz-se o **gradiente simplético** de  $H$  ou o **campo Hamiltoniano**.*

Observe-se que

$$\begin{aligned} X_H(x)^T A(x) v &= \nabla H(x) \cdot v, \\ \nabla H(x) &= -A(x) \cdot X_H(x), \\ X_H(x) &= -A(x)^{-1} \nabla H(x). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nestas condições, tem-se a Proposição seguinte.

**Proposição 2.4.4.**  *$H$  é constante ao longo das órbitas do fluxo de  $X_H$ .*

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} DH_x(X_H(x)) &= \omega_X(X_H(x), X_H(x)) \\ &= X_H(x)^T A(x) X_H(x) = 0. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.4.5.** *Se  $A$  é uma matriz antissimétrica (constante) não singular, então*

$$\omega_x(u, v) = u^T A v$$

*é uma estrutura simplética em  $\mathbb{R}^n$ .*



**Exemplo 2.4.6.** Se  $A = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array} \right] \in M_{2n}(\mathbb{R})$  e  $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , então o campo Hamiltoniano para a estrutura simplética do exemplo 2.4.5, associado a  $H(x, y)$  é

$$\begin{aligned} X_H(x, y) &= \left( -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right) \\ &= \left( -\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial y_n}, \frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right), \end{aligned}$$

donde se tem o sistema Hamiltoniano clássico,

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

A generalização mais recente da teoria dos sistemas Hamiltonianos se baseia na noção de parêntesis de Poisson.

**Definição 2.4.7.** Um **parêntesis de Poisson** numa variedade suave  $M$  é dado por uma aplicação bilinear  $\{, \} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$  no espaço das funções suaves que satisfazem as seguintes propriedades:

- i)  $\{f_1, f_2\} = -\{f_2, f_1\}$  (anti-simetria),
- ii)  $\{f_1 f_2, f\} = f_1 \{f_2, f\} + \{f_1, f\} f_2$  (identidade de Leibnitz),
- iii)  $\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} = 0$  (identidade de Jacoby).

Dada uma função  $h \in C^\infty(M)$ , define-se o campo vectorial  $X_h$  por

$$X_h(f) = \{f, h\}, \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

Nestas condições, o campo  $X_h$  diz-se o **gradiente Poisson de  $h$** .

Chama-se **sistema Hamiltoniano** numa variedade de Poisson  $M$  ao fluxo definido pela equação

$$\dot{x} = X_h(x).$$

**Exemplo 2.4.8.** Se  $A$  é uma matriz antissimétrica (constante),

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

define uma estrutura de Poisson em  $\mathbb{R}^n$ .

Se  $\omega$  é uma estrutura simplética em  $M$ , então, definindo

$$\{f, g\}(x) = \omega_x(X_f(x), X_g(x)),$$

com  $X_f(x)$  e  $X_g(x)$  gradientes simpléticos, tem-se que  $\{., .\}$  é uma estrutura de Poisson. Além disso, o gradiente simplético coincide com o gradiente de Poisson pois

$$\{f, h\}(x) = \omega_x(X_f(x), X_h(x)) = Df(X_h) = X_h(f).$$

Neste sentido, o conceito de estrutura de Poisson generaliza o de estrutura Simplética.

Se  $\omega_x(u, v) = u^T A(x)v$ , com  $A(x) = (a_{ij}(x))$ , então

$$\{f, g\}(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

onde  $a_{ij}(x)^{-1}$  é a entrada  $ij$  da matriz  $A(x)^{-1}$ .

**Teorema 2.4.9.** *Seja  $A$  uma matriz invertível  $n \times n$  antissimétrica. Então  $A^{-1}$  é antissimétrica,*

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n -\frac{a_{ij}^{-1}}{x_i x_j} dx_i \wedge dx_j$$

define uma estrutura simplética em  $\mathbb{R}_+^n$  e o gradiente simplético de

$$h = \sum_{i=1}^n (x_i - q_i \log x_i)$$

é o campo Lotka-Volterra

$$X(x) = x * A(x - q),$$

com  $q \in \mathbb{R}_+^n$  ponto fixo do sistema.

*Demonstração.* Para mostrar que

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n -\frac{a_{ij}^{-1}}{x_i x_j} dx_i \wedge dx_j$$

define uma estrutura simplética em  $\mathbb{R}_+^n$ , veja-se que

$$\begin{aligned}\omega_x(u, v) &= -u^T \left[ \frac{a_{ij}^{-1}}{x_i x_j} \right] v \\ &= -u^T D_x^{-1} A^{-1} D_x^{-1} v,\end{aligned}$$

com  $D_x^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n})$  e que

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{i,j=1}^n -\frac{a_{ij}^{-1}}{x_i x_j} dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n -a_{ij}^{-1} \frac{dx_i}{x_i} \wedge \frac{dx_j}{x_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^n -a_{ij}^{-1} (d \log x_i) \wedge (d \log x_j)\end{aligned}$$

implica que  $d\omega = 0$ .

Consideremos

$$h = \sum_{i=1}^n (x_i - q_i \log x_i)$$

cujo gradiente é dado por

$$\nabla h = \left( \frac{x - q}{x} \right) = \left( \frac{x_1 - q_1}{x_1}, \dots, \frac{x_n - q_n}{x_n} \right).$$

Por (2.8) temos que

$$X_h(x) = D_x A D_x \nabla h(x),$$

em que cada componente  $i$  é dada por

$$\sum_{j=1}^n x_i x_j a_{ij} \frac{x_j - q_j}{x_j} = \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} (x_j - q_j),$$

donde

$$X_h(x) = x * A(x - q),$$

em que  $q \in \mathbb{R}_+^n$  é um ponto fixo do sistema. □

**Teorema 2.4.10.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  antissimétrica. Então*

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) x_i x_j \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

*define uma estrutura de Poisson em  $\mathbb{R}_+^n$  e o gradiente Poisson de*

$$h = \sum_{i=1}^n (x_i - q_i \log x_i)$$

*é o campo Lotka-Volterra*

$$X(x) = x * A(x - q),$$

*com  $q \in \mathbb{R}_+^n$  ponto fixo do sistema.*

*Mais, se  $A$  for invertível, então a estrutura de Poisson acima corresponde à estrutura simplética do Teorema 2.4.9.*

A demonstração deste Teorema pode ser vista em [3].

Combinando estas ideias com os critérios de Volterra para um sistema ser conservativo, obtém-se o seguinte resultado (conforme [3]).

**Corolário 2.4.11.** *Suponha-se que o sistema (2.3) tem um ponto fixo em  $\mathbb{R}_+^n$ . Se a matriz de interacção do sistema satisfaz*

$$a_{ii} = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

$$a_{ij} \neq 0 \Rightarrow a_{ij} a_{ji} < 0$$

*e o seu grafo associado é uma floresta (i.e., não tem ciclos), então o sistema tem uma formulação hamiltoniana directa.*

## 2.5 Sistemas Dissipativos

Recorde-se que um sistema Lotka-volterra se diz **dissipativo** se existe uma matriz diagonal  $D > 0$  tal que, no sentido das formas quadráticas,  $AD \leq 0$ .

**Proposição 2.5.1.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  dissipativa. Então a função*

$$h = \sum_{i=1}^n (x_i - q_i \log x_i)$$

*é função de Liapunov do fluxo do sistema Lotka-Volterra*

$$\dot{x} = x * A(x - q),$$

*com  $q \in \mathbb{R}_+^n$  ponto fixo do sistema.*

Recorde-se que uma matriz  $A$   $n \times n$  pode ser escrita como a soma da sua parte simétrica  $A^{sim}$  e da sua parte anti-simétrica  $A^{as}$ ,

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}, \quad (2.9)$$

em que

$$A^{sim} = \frac{A + A^T}{2} \quad e \quad A^{as} = \frac{A - A^T}{2}.$$

Conforme a observação 2.2.2,  $A < 0$  significa que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

e usando (2.9), isto equivale a  $A^{sim} < 0$ , ou seja, que  $A + A^T$  é definida negativa.

Considere-se a operação designada por **simetrização**, que a cada matriz quadrada  $A$ , associa a sua parte simétrica,

$$A \mapsto \frac{A + A^T}{2}.$$

Verifica-se facilmente que dada uma matriz  $A$  anti-simétrica ( $A = -A^T$ ) e uma matriz  $D \leq 0$ , resulta pela simetrização que

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B^T & D \end{array} \right] \mapsto \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & D^{sim} \end{array} \right].$$

No sentido de se ver um resultado que permite uma caracterização das matrizes dissipativas, vejam-se os dois lemas seguintes.

**Lema 2.5.2.** *Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz  $n \times n$  simétrica tal que  $A \neq 0$  e  $a_{ii} = 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Então  $A$  é indefinida (existem valores próprios  $> 0$  e  $< 0$ ).*

*Demonstração.* Como  $A \neq 0$ , existe  $a_{ij} \neq 0$ , donde se verifica facilmente que a submatriz de  $A$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{ij} \\ a_{ji} & 0 \end{bmatrix}$$

tem determinante  $< 0$  (pois  $a_{ij} = a_{ji}$ ).

Considerando o vector de  $\mathbb{R}^n$  cujas entradas são todas nulas excepto as entradas  $i$  e  $j$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_i & 0 & \cdots & 0 & x_j & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 2a_{ij}x_ix_j.$$

Observando que  $2a_{ij}x_ix_j$  troca de sinal em função de  $x_i$  e  $x_j$ , conclui-se o pretendido.  $\square$

**Lema 2.5.3.** *Se  $A$  é uma matriz simétrica da forma*

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline B^T & U \end{array} \right],$$

*com  $B \neq 0$ , então  $A$  é indefinida.*

*Demonstração.* Considere-se  $0$  a matriz nula  $k \times k$  e  $U$  matriz  $(n-k) \times (n-k)$ . Tomando  $y \in \mathbb{R}^{n-k} \setminus \{0\}$  tal que  $By \neq 0$ , tem-se que

$$\begin{bmatrix} x^T & y^T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^T By + y^T U y$$

troca de sinal (e pode tomar valores tão grandes ou tão pequenos quanto se queira) como função de  $x$ , donde se conclui o resultado.  $\square$

**Teorema 2.5.4.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  dissipativa e  $D > 0$  uma matriz diagonal tal que  $AD \leq 0$ . Suponha-se que  $a_{ii} = 0$  para todo o  $i \in \{1, \dots, k\}$  e  $a_{ii} \leq 0$  para todo o  $i \in \{k+1, \dots, n\}$ . Então*

$$AD = \left[ \begin{array}{c|c} R & S \\ \hline -S^T & U \end{array} \right],$$

com  $R$  matriz  $k \times k$  e  $U$  matriz  $(n-k) \times (n-k)$  em que  $R = -R^T$  e  $U \leq 0$ .

Tem-se ainda

$$(AD)^{sim} = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & U^{sim} \end{array} \right].$$

*Demonstração.* Considere-se

$$AD = \left[ \begin{array}{c|c} R & S \\ \hline V & U \end{array} \right],$$

com  $R$  matriz  $k \times k$  e  $U$  matriz  $(n-k) \times (n-k)$ . Como  $AD \leq 0$ , tem-se  $R \leq 0$  e  $U \leq 0$  e como  $a_{ii} = 0$  para todo o  $1 \leq i \leq k$ , tem-se que  $R$  tem diagonal nula, donde, aplicando o Lema 2.5.2 à parte simétrica de  $R$ , se tem  $R^{sim} = 0$ , ou seja,  $R = -R^T$ .

Analogamente, aplicando agora o Lema 2.5.3 à parte simétrica de  $AD$ , tem-se  $V = -S^T$ .

Pode-se então concluir que

$$(AD)^{sim} = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & U^{sim} \end{array} \right].$$

$\square$

**Observação 2.5.5.** *Observe-se que é válida a recíproca do Teorema 2.5.4, i.e, se existe  $D > 0$  matriz diagonal tal que  $AD$  é da forma*

$$\left[ \begin{array}{c|c} R & S \\ \hline -S^T & U \end{array} \right],$$

*com  $R$  e  $U$  nas condições do Teorema 2.5.4, então  $A$  é dissipativa.*

Uma das conclusões que se pode tirar deste resultado é que se  $A$  é dissipativa e o sistema Lotka-Volterra associado for skew-product,

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, y) \\ \dot{y} = Y(y), \end{cases}$$

então  $A$  é dada por um produto. O que é equivalente a dizer que, se  $A$  for dissipativa e o seu grafo for conexo, então  $A$  não é um skew-product, i.e, não existe uma reordenação dos índices de modo que

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right].$$

Tendo em consideração a observação 1.3.7 veja-se o resultado seguinte.

**Proposição 2.5.6.** *O grafo de um dado sistema é desconexo, com  $m$  componentes conexas, se, e só se, a sua dinâmica é dada pelo produto de  $m$  dinâmicas.*

No sentido da definição de fluxo e semifluxo completo (conforme definição 1.3.2) de um sistema de equações diferenciais, vejam-se os resultados seguintes.

**Teorema 2.5.7.** *Um sistema Lotka-Volterra dissipativo define um semifluxo completo.*

*Demonstração.* Pela caracterização do comportamento das órbitas de um sistema dissipativo, considerando o compacto  $K = \{h \leq C\}$ , com  $C$  constante e  $V$  função de Liapunov própria, conforme definida na Proposição 2.5.1, tem-se facilmente o resultado.  $\square$

Verifica-se facilmente que deste Teorema resulta o seguinte Corolário.

**Corolário 2.5.8.** *Um sistema Lotka-Volterra conservativo define um fluxo completo.*



*Demonstração.* Pelo Teorema anterior, observando que cada órbita num sistema conservativo está contida dentro de um compacto, tem-se facilmente o resultado.  $\square$

## 2.6 Folheações Invariantes

Uma função suave  $g : M \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$  com derivada sobrejectiva em todos os pontos do domínio  $M$  diz-se uma **submersão**.

**Proposição 2.6.1.** *Se  $g : M \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$  for uma submersão, então, para todo o  $c \in g(M)$ ,*

$$g^{-1}(c) = \{x \in M : g(x) = c\}$$

*é uma subvariedade de dimensão  $n - k$ .*

**Definição 2.6.2.** *A família  $\mathcal{F} := \{g^{-1}(c)\}_{c \in g(M)}$  destas subvariedades diz-se uma **folheação**.*

*Cada subvariedade  $\mathcal{F}_c := g^{-1}(c)$  diz-se uma **folha** de  $\mathcal{F}$ . Chama-se **dimensão** de  $\mathcal{F}$  à dimensão das suas folhas.*

**Definição 2.6.3.** *A folheação  $\mathcal{F}$  diz-se **invariante** por um campo suave  $X : M \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  se  $X(x) \in T_x \mathcal{F}$ , para todo o  $x \in M$ , onde  $T_x \mathcal{F}$  representa o espaço tangente à única folha de  $\mathcal{F}$  que contém  $x$ . Neste caso, também se pode dizer que  $\mathcal{F}$  é  $X$ -invariante.*

**Proposição 2.6.4.** *Sejam  $g : M \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$  uma submersão,  $X : M \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vectorial e  $\mathcal{F} = \{g^{-1}(c)\}_{c \in g(M)}$ . São equivalentes:*

- (1)  $\mathcal{F}$  é  $X$ -invariante;
- (2)  $Dg_x X(x) = 0$ , para todo o  $x \in M$ ;
- (3)  $X(x) \in \text{Nuc}(Dg_x)$ , para todo o  $x \in M$ ;
- (4) o fluxo  $\phi_t$  de  $X$  deixa invariantes todas as folhas de  $\mathcal{F}$ , i.e.,  $\phi_t(\mathcal{F}_c) = \mathcal{F}_c$ , para todo o  $c \in g(M)$ .

Veja-se agora a aplicação destas ideias em sistemas Lotka-Volterra. Para tal, considere-se um sistema Lotka-Volterra de dimensão  $n$  com um ponto fixo  $q \in \mathbb{R}_+^n$ , sendo  $A$  a sua matriz de interacção.

Seja  $X(x) = x * A(x - q)$  e suponha-se que  $\text{rank}(A) = k$ , em que  $\text{rank}(A)$  é a característica da matriz  $A$ .

Seja  $(w_1, \dots, w_{n-k})$  base de

$$\text{Nuc}(A^T) = \{w \in \mathbb{R}^n : w^T A = 0\}.$$

Observe-se que

$$w^T A = 0 \Leftrightarrow A^T w = 0.$$

Define-se

$$g : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

por

$$g(x) = (w_1^T \log x, \dots, w_{n-k}^T \log x),$$

onde

$$\log x = (\log x_1, \dots, \log x_n).$$

Pode-se escrever

$$g(x) = W \log x,$$

onde  $W$  é a matriz com linhas  $w_1^T, \dots, w_{n-k}^T$ .

**Proposição 2.6.5.** *Nas condições descritas anteriormente,  $g : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  é uma submersão, a folheação  $\mathcal{F} = \{g^{-1}(c)\}_{c \in g(M)}$  é  $X$ -invariante e a dimensão de  $\mathcal{F}$  é  $\text{rank}(A)$ .*

*Demonstração.* Tem-se que

$$Dg_x = W D_x^{-1},$$

onde  $D_x^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n})$ , e como  $\text{rank}(W) = n-k$ , tem-se  $\text{rank}(Dg_x) = n-k$ , donde

$$Dg_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

é sobrejectiva. Logo  $g$  é submersão.

Considerando a matriz diagonal  $D_x = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ , tem-se que

$$\begin{aligned} Dg_x(X(x)) &= Dg_x(D_x A(x - q)) \\ &= W D_x^{-1} D_x A(x - q) \\ &= W A(x - q) = 0 \end{aligned}$$

pois  $WA = 0$ , dado que  $w_i^T A = 0$  para todo o  $i \in \{1, \dots, n - k\}$ , donde pela Proposição 2.6.4, se conclui que  $\mathcal{F} = \{g^{-1}(c)\}_{c \in g(M)}$  é  $X$ -invariante.  $\square$

Seja  $\Sigma(A)$  o conjunto das singularidades de  $X$ . Tem-se

$$\Sigma(A) = \{x : X(x) = 0\} = \{x : A(x - q) = 0\},$$

que é a intersecção de  $\mathbb{R}_+^n$  com um subespaço afim de dimensão  $n - k$ .

**Lema 2.6.6.** *Seja  $A$  uma matriz dissipativa. Então*

$$\text{Nuc}(A) = \text{Nuc}(A^T) = \text{Nuc}\left(\frac{A + A^T}{2}\right) \cap \text{Nuc}\left(\frac{A - A^T}{2}\right).$$

*Demonstração.* Como se viu em (2.9) e (2.5) na secção 2.5 (Capítulo 2), tem-se

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

em que

$$A^{sim} = \frac{A + A^T}{2} \quad e \quad A^{as} = \frac{A - A^T}{2}.$$

Analogamente,  $A^T$  pode ser escrita como a diferença da sua parte simétrica  $A^{sim}$  pela sua parte anti-simétrica  $A^{as}$ ,

$$A^T = \frac{A + A^T}{2} - \frac{A - A^T}{2}. \quad (2.10)$$

É evidente que

$$\text{Nuc}(A) \supseteq \text{Nuc}(A^{sim}) \cap \text{Nuc}(A^{as}).$$

Por outro lado,  $v \in \text{Nuc}(A)$  implica que  $Av = 0$ , donde  $v^T Av = 0$ , mas como  $A \leq 0$ , tem-se que

$$v \in \text{Nuc}(A^{sim}).$$

Observando que  $A^{as} = A - A^{sim}$ , tem-se que

$$v \in \text{Nuc}(A^{as}),$$

donde

$$v \in Nuc(A^{sim}) \cap Nuc(A^{as}).$$

Logo

$$Nuc(A) = Nuc(A^{sim}) \cap Nuc(A^{as}).$$

Analogamente, por (2.10), prova-se que

$$Nuc(A^T) = Nuc(A^{sim}) \cap Nuc(A^{as}).$$

□

**Teorema 2.6.7.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  dissipativa. Cada folha de  $\mathcal{F} = \{g^{-1}(c)\}_{c \in g(M)}$  intersecta transversalmente o subespaço afim  $\Sigma(A)$  num único ponto.*

*Demonstração.* Seja  $(v_1, \dots, v_k)$  base do espaço gerado pelas linhas de  $A$ , que é igual a  $Nuc(A)^\perp$ .

Considere-se  $V$  a matriz com linhas  $v_1^T, \dots, v_k^T$  e  $W$  a matriz com linhas  $w_1^T, \dots, w_{n-k}^T$ , em que  $(w_1, \dots, w_{n-k})$  é base de  $Nuc(A^T)$  que é igual a  $Nuc(A)$  pelo Lema 2.6.6. Com esta notação, tem-se

$$A(x - q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V(x - q) = 0.$$

Seja  $U = \begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix}$ . Pela forma como  $W$  e  $V$  foram definidos, tem-se que  $U$  é invertível.

Tem-se que  $x \in g^{-1}(c) \cap \Sigma(A)$  é equivalente a

$$\begin{cases} W \log x = c \\ V(x - q) = 0 \end{cases}$$

e considerando  $u = \log x$ , é ainda equivalente a

$$\begin{cases} Wu = c \\ V(e^u - q) = 0. \end{cases}$$

Vai-se agora mostrar que se  $u$  e  $u'$  são tais que

$$\begin{cases} Wu = c \\ V(e^u - q) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} Wu' = c \\ V(e^{u'} - q) = 0 \end{cases}$$

então  $u = u'$ .

Pelo Teorema de Lagrange, tem-se que para todo o  $i \in \{1, \dots, n\}$  existe  $\tilde{u}_i \in [u_i, u'_i]$  tal que

$$e^{u_i} - e^{u'_i} = e^{\tilde{u}_i}(u_i - u'_i),$$

o que em notação vectorial corresponde a dizer que

$$\begin{aligned} e^u - e^{u'} &= D_{e\tilde{u}}(u - u') \\ &= e^{\tilde{u}} * (u - u'). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \begin{cases} W(u - u') = 0 \\ V(e^u - e^{u'}) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} W(u - u') = 0 \\ VD_{e\tilde{u}}(u - u') = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \left[ \frac{W}{VD_{e\tilde{u}}} \right] (u - u') = 0 \\ &\Leftrightarrow U \left[ \frac{I}{0} \middle| \frac{0}{D_{e\tilde{u}}} \right] (u - u') = 0, \end{aligned}$$

donde, como  $\det \left( \left[ \frac{I}{0} \middle| \frac{0}{D_{e\tilde{u}}} \right] \right) \neq 0$ , se tem  $u = u'$ . □

## Capítulo 3

# Sistemas Lotka-Volterra Estavelmente Dissipativos

No mundo real, na maioria das vezes não se consegue conhecer exactamente a matriz  $A = (a_{ij})$  de interacção do sistema. Assim, devido essencialmente a considerações da biologia e da ecologia, procuram-se estudar resultados que persistam a pequenas perturbações. Deste modo, pretende-se estudar sistemas que ao serem perturbados, no sentido das definições adiante apresentadas, mantenham as suas propriedades.

Este capítulo divide-se em quatro secções. Na primeira secção define-se e procura-se caracterizar os sistemas estavelmente dissipativos (o que está directamente relacionado com o conceito de matrizes estavelmente dissipativas, como se verá adiante pelas respectivas definições).

Na segunda secção analisam-se alguns resultados sobre a dinâmica desta classe de sistemas, tendo por base um algoritmo desenvolvido por Redheffer *et al.* [19, 20, 18, 16, 17] que actua no grafo da matriz de interacção do sistema.

Na terceira secção apresenta-se essencialmente um resultado que estabelece a igualdade da característica de matrizes estavelmente dissipativas que partilham o mesmo grafo.

Por fim, na última secção, discutem-se algumas ideias relacionadas com a dinâmica desta classe de sistemas, sendo apresentados alguns exemplos ilustrativos.

### 3.1 Matrizes Estavelmente Dissipativas

**Definição 3.1.1.** Uma **perturbação** de uma matriz real  $A$   $n \times n$  pode ser qualquer outra matriz real  $\tilde{A}$   $n \times n$  tal que

$$\tilde{a}_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0.$$

**Definição 3.1.2.** Um sistema Lotka-Volterra com matriz de interacção  $A$  diz-se **estavelmente dissipativo** (e neste caso a matriz  $A$  diz-se **estavelmente dissipativa**) se qualquer perturbação suficientemente pequena  $\tilde{A}$  de  $A$  é dissipativa, i.e.,

$$\exists \epsilon > 0 : \max_{i,j} |a_{ij} - \tilde{a}_{ij}| < \epsilon \Rightarrow \tilde{A} \text{ é dissipativa.}$$

Apenas se consideram perturbações que tenham o mesmo grafo que a matriz de interacção do sistema original. A noção de *estavelmente dissipativo* é devida a Redheffer *et al.*, que numa série de artigos [19, 20, 18, 16, 17] estudaram a estabilidade assintótica desta classe de sistemas, usando a designação de sistemas *estavelmente admissíveis*. Redheffer e seus colaboradores designaram por *admissíveis* as matrizes que Volterra inicialmente classificou como *dissipativas* (conforme [25]).

Ainda que as condições necessárias e suficientes para matrizes dissipativas tenham sido estudadas por vários autores, como Redheffer *et al.* [19, 20, 18, 16, 17], Guo *et al.* [5] e Rocha Filho *et al.* [21], existem ainda muitas questões em aberto sobre a caracterização dos sistemas estavelmente dissipativos para além dos trabalhos de Redheffer [18, 16] e, muito recentemente, de um artigo de Zhao e Luo [29].

Por definição, dado um sistema dissipativo do tipo (2.3), pode-se escolher uma matriz diagonal  $D > 0$  tal que  $AD \leq 0$ , sendo  $A = (a_{ij})$  a matriz de interacção do sistema. No entanto, para sistemas estavelmente dissipativos esta escolha pode ser melhorada, como se pode ver pelo lema seguinte, demonstrado por Redheffer e Zhou [20].

**Lema 3.1.3.** *Seja  $A$  uma matriz estavelmente dissipativa. Então pode-se escolher uma matriz diagonal  $D > 0$  tal que  $AD \leq 0$  e a condição seguinte*

se verifique

$$\sum_{i,j=1}^n d_j a_{ij} w_i w_j = 0 \Rightarrow a_{ii} w_i = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

*Demonstração.* Dada  $A = (a_{ij})$  uma matriz  $n \times n$  estavelmente dissipativa, considere-se a perturbação  $\tilde{A} = \tilde{a}_{ij}$  dada por

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij}, \forall i \neq j \quad e \quad \tilde{a}_{ii} = (1 - \delta) a_{ii}, \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

com  $\delta > 0$  constante suficientemente pequena. Considere-se agora uma matriz  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) > 0$  tal que  $\tilde{A}D \leq 0$ . Como  $a_{ii} \leq 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  e

$$\sum_{i,j=1}^n d_j a_{ij} w_i w_j = \sum_{i,j=1}^n d_j \tilde{a}_{ij} w_i w_j + \delta \sum_{i=1}^n d_i a_{ii} w_i^2,$$

verifica-se que  $AD \leq 0$  e

$$\sum_{i,j=1}^n d_j a_{ij} w_i w_j = 0 \Rightarrow a_{ii} w_i = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

□

**Definição 3.1.4.** Dada  $A$  uma matriz  $n \times n$  e  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ , chama-se **submatriz**  $I \times I$  de  $A$  à matriz  $A_I = (a_{ij})_{(i,j) \in I \times I}$ .

**Lema 3.1.5.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  estavelmente dissipativa. Então, para todo  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ , a matriz  $A_I$  é estavelmente dissipativa.

*Demonstração.* Seja  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  fixo. Considere-se  $A_I$  a submatriz de  $A$ . Quer-se ver que qualquer perturbação  $\tilde{A}_I$  de  $A_I$  é dissipativa. Considere-se então  $\tilde{A}$  a matriz  $A$  cujas entradas  $(i, j) \in I \times I$  são substituídas pelas entradas de  $\tilde{A}_I$ . Tem-se que  $\tilde{A}$  é uma perturbação de  $A$ , donde existe uma matriz diagonal  $D > 0$  tal que  $\tilde{A}D \leq 0$ . Verifica-se facilmente que considerando  $D_I$  a submatriz  $I \times I$  de  $D$ , se tem  $\tilde{A}_I D_I \leq 0$ , donde  $\tilde{A}_I$  é dissipativa, e consequentemente,  $A_I$  é estavelmente dissipativa. □



É relativamente fácil verificar que se  $A = (a_{ij})$  é uma matriz dissipativa, então  $a_{ii} \leq 0$  para todo o  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Assim, pode-se estudar as condições necessárias e suficientes para uma matriz ser estavelmente dissipativa separando em dois casos.

**Caso I:**  $a_{ii} < 0$  para todo o  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Usando o Lema 3.1.3 e a definição de matriz estavelmente dissipativa, provamos facilmente o resultado seguinte (conforme [29]).

**Teorema 3.1.6.** *Se  $a_{ii} < 0$  para todo o  $i \in \{1, \dots, n\}$ , então  $A$  é estavelmente dissipativa se, e só se, existe uma matriz diagonal  $D > 0$  tal que  $AD < 0$ .*

*Demonstração.* Suponha-se que  $A$  é estavelmente dissipativa. Pelo Lema 3.1.3 tem-se que existe uma matriz diagonal  $D > 0$  tal que  $AD \leq 0$  e que satisfaz

$$\sum_{i,j=1}^n d_j a_{ij} w_i w_j = 0 \Rightarrow a_{ii} w_i = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.1)$$

Suponha-se agora que existe  $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $\sum_{i,j=1}^n d_j a_{ij} w_i w_j = 0$ . Por (3.1) tem-se

$$a_{ii} w_i = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

mas como por hipótese  $a_{ii} < 0$  para todo o  $1 \leq i \leq n$ , tem-se  $w_i = 0$  para todo o  $1 \leq i \leq n$ , o que é absurdo. Logo  $AD < 0$ .

Suponha-se que existe uma matriz diagonal  $D > 0$  tal que  $AD < 0$ , o que é equivalente à matriz simétrica  $AD + DA^T < 0$ , conforme a observação 2.2.2. Recordando que para matrizes simétricas, uma matriz ser definida negativa é uma propriedade aberta, i.e, qualquer matriz suficientemente próxima também é definida negativa, tem-se que para qualquer  $\tilde{A}$  próxima de  $A$

$$\tilde{A}D + D\tilde{A}^T < 0,$$

o que termina a demonstração. □

Resultados sobre as condições necessárias e suficientes em que existe uma matriz diagonal  $D > 0$  tal que  $AD < 0$ , podem ser encontrados em [16].

Dada uma matriz  $A$ , o grafo  $G(A)$  é construído (i) colocando-se uma aresta a unir os vértices  $i$  e  $j$  se  $a_{ij} \neq 0$  ou  $a_{ji} \neq 0$  e (ii) colocando-se uma bola  $\bullet$  no vértice  $i$  se  $a_{ii} \neq 0$  e uma bola  $\circ$  no vértice  $j$  se  $a_{jj} = 0$ .

**Caso II: Existe algum  $a_{ii} = 0$ .**

Vejam-se primeiro dois resultados demonstrados por Redheffer e Walter em [18].

**Lema 3.1.7.** *Sejam  $i$  e  $j$  dois vértices adjacentes de  $G(A)$  com  $A$  uma matriz  $n \times n$  estavelmente dissipativa. Então  $a_{ii}a_{jj} > a_{ij}a_{ji}$  para todo o  $i \neq j$ .*

*Demonstração.* Como  $A$  é uma matriz estavelmente dissipativa sabe-se que existe  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) > 0$  tal que  $AD \leq 0$ . Então, considerando  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  com  $x_k = 0$  para  $k \neq i$  ou  $j$ , tem-se

$$\sum_{i,j=1}^n d_j a_{ij} x_i x_j = d_i a_{ii} x_i^2 + (d_j a_{ij} + d_i a_{ji}) x_i x_j + d_j a_{jj} x_j^2 \leq 0,$$

donde

$$(d_j a_{ij} + d_i a_{ji})^2 \leq 4d_i d_j a_{ii} a_{jj}.$$

Se  $a_{ii}a_{jj} = 0$ , pode-se escolher  $d_i$  e  $d_j$  se, e só se,  $a_{ij}a_{ji} < 0$ , obtendo-se o resultado. Suponha-se então que  $a_{ii}a_{jj} \neq 0$ . Como  $A$  estavelmente dissipativa implica que  $a_{ii} \leq 0$  para todo o  $i \in \{1, \dots, n\}$ , tem-se  $a_{ii}a_{jj} > 0$ . Considere-se então a submatriz de  $A$

$$B = \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{bmatrix}.$$

Como  $A$  é estavelmente dissipativa, aplicando o Lema 3.1.5, tem-se que  $B$  é estavelmente dissipativa, donde pelo Teorema 3.1.6, se tem o resultado.  $\square$

**Lema 3.1.8.** *Se  $A$  é uma matriz estavelmente dissipativa, então todo o ciclo de  $G(A)$  tem pelo menos uma aresta entre dois vértices  $i$  e  $j$  tais que  $a_{ii} < 0$  e  $a_{jj} < 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $A$  uma matriz dissipativa. Suponha-se que existe um ciclo  $L$  de  $G(A)$  no qual não existem dois vértices adjacentes  $i$  e  $j$  tais que  $a_{ii} < 0$  e  $a_{jj} < 0$ . Para fixar notação, suponha-se que  $i_1, \dots, i_k$ , com esta ordem, são os vértices de  $L$ . Tomando quaisquer dois vértices adjacentes  $i_s, i_t$  de  $L$ , tem-se  $a_{i_s i_s} a_{i_t i_t} = 0$ . Seja  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) > 0$  tal que  $AD \leq 0$ . Então,

$$d_{i_t} a_{i_s i_t} + d_{i_s} a_{i_t i_s} = 0.$$

Como  $L$  é um ciclo e é composto por  $k$  arestas, tem-se um sistema de  $k$  equações

$$\begin{cases} d_{i_2} a_{i_1 i_2} + d_{i_1} a_{i_2 i_1} = 0 \\ d_{i_3} a_{i_2 i_3} + d_{i_2} a_{i_3 i_2} = 0 \\ \dots \\ d_{i_k} a_{i_{k-1} i_k} + d_{i_{k-1}} a_{i_k i_{k-1}} = 0 \\ d_{i_1} a_{i_k i_1} + d_{i_k} a_{i_1 i_k} = 0 \end{cases}$$

donde

$$|d_{i_2} a_{i_1 i_2} d_{i_3} a_{i_2 i_3} \dots d_{i_k} a_{i_{k-1} i_k} d_{i_1} a_{i_k i_1}| = |d_{i_1} a_{i_2 i_1} d_{i_2} a_{i_3 i_2} \dots d_{i_{k-1}} a_{i_k i_{k-1}} d_{i_k} a_{i_1 i_k}|,$$

ou seja,

$$|a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k i_1}| = |a_{i_2 i_1} a_{i_3 i_2} \dots a_{i_k i_{k-1}} a_{i_1 i_k}|.$$

Considere-se  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$  perturbação de  $A$ . Tem-se  $G(\tilde{A}) = G(A)$ . Considerando-se o ciclo  $\tilde{L}$  de  $G(\tilde{A})$  formado pelos  $k$  vértices  $i_1, \dots, i_k$  de  $G(\tilde{A})$  correspondentes aos  $k$  vértices  $i_1, \dots, i_k$  de  $G(A)$ , é fácil verificar que se pode escolher  $\tilde{A}$  perturbação de  $A$ , com  $\max_{i,j} |a_{ij} - \tilde{a}_{ij}|$  arbitrariamente pequeno, tal que

$$|a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k i_1}| \neq |a_{i_2 i_1} a_{i_3 i_2} \dots a_{i_k i_{k-1}} a_{i_1 i_k}|,$$

donde  $\tilde{A}$  não é dissipativa e, conseqüentemente,  $A$  não é estavelmente dissipativa, o que termina a demonstração.  $\square$

Usando estes dois lemas, pode-se demonstrar o Teorema seguinte (conforme [29]).

**Teorema 3.1.9.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  tal que  $a_{ii} = 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  ou existe um único  $k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $a_{kk} < 0$  e  $a_{ii} = 0$  para todo  $i \neq k$ . Então,  $A$  é estavelmente dissipativa se, e só se, (i)  $G(A)$  não tem ciclos e (ii)  $a_{ij} \neq 0 \Rightarrow a_{ij} a_{ji} < 0$ , para todo  $i \neq j$ .*

*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ ) No caso em que existe um único  $k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $a_{kk} < 0$  e  $a_{ii} = 0$  para todo o  $i \neq k$ , considere-se, sem perda de generalidade que  $k = 1$ . Como  $G(A)$  não tem ciclos, então tem no máximo  $n - 1$  vértices. Assim, assumindo que  $a_{ij} \neq 0 \Rightarrow a_{ij}a_{ji} < 0$ , para todo o  $i \neq j$ , pode-se escolher uma matriz diagonal positiva  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  tal que  $d_j a_{ij} + d_i a_{ji} = 0$ , para todo o  $a_{ij} \neq 0$ , donde  $\sum_{i,j=1}^n d_j a_{ij} x_i x_j = d_1 a_{11} x_1^2 \leq 0$  para todo o  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $A$  é dissipativa. Para qualquer perturbação suficientemente pequena  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$  de  $A$ ,  $\tilde{A}$  também satisfaz as condições (i) e (ii), donde  $\tilde{A}$  é dissipativa e portanto  $A$  é estavelmente dissipativa.

( $\Rightarrow$ ) Pelos Lemas 3.1.7 e 3.1.8, as condições (i) e (ii) são obviamente satisfeitas, pois por hipótese existe no máximo um  $a_{ii} \neq 0$ .  $\square$

No caso em que existe mais do que uma entrada  $a_{ii} < 0$  tem-se também um resultado que caracteriza as matrizes estavelmente dissipativas. No entanto, veja-se primeiro o seguinte lema.

**Lema 3.1.10.** *Seja  $T = (V, A)$  um grafo em que  $V$  é o conjunto de todos os vértices e  $A$  o conjunto de todas as arestas. Então, se  $T = (V, A)$  não tem ciclos, existe  $\{V_0, \dots, V_l\}$  partição de  $V$  tal que*

- (i)  $V_0$  é constituído pelos vértices que estão numa das extremidades de cada componente conexa do grafo,
- (ii) e para todo o  $j \in \{1, \dots, l\}$  e para todo o  $i \in V_j$ , existe um único  $i' \in V_{j-1}$  tal que a aresta  $[i, i'] \in A$ .

*Demonstração.* Se  $T = (V, A)$  é um grafo sem ciclos, então o grafo é uma árvore, no caso de ser conexo, ou uma união disjunta de  $m$  árvores, no caso de ter  $m$  componentes conexas. Pode-se então considerar um conjunto  $V_0$  formado pelos vértices que se encontram numa das extremidades de cada componente conexa do grafo. Recursivamente, pode-se considerar o conjunto  $V_j$  formado pelos vértices  $i$  tais que existe uma aresta que os liga aos vértices  $i'$  de  $V_{j-1}$ , para todo o  $j \in \{1, \dots, l\}$ . Este processo tem de parar pois o número de vértices é finito.  $\square$

**Teorema 3.1.11.** *Suponha-se que  $a_{ii} = 0$  para todo o  $i \leq k$  e  $a_{ii} < 0$ , para todo o  $i > k$ . Sejam  $M = (a_{ij})$  com  $k+1 \leq i, j \leq n$  e  $\tilde{G}(A)$  o grafo obtido de  $G(A)$  removendo todas as arestas  $[i, j]$  com  $i, j > k$ . Então,  $A$  é estavelmente dissipativa se, e só se, (i)  $\tilde{G}(A)$  não tem ciclos e (ii) existe  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) > 0$  tal que  $MD_0 < 0$  e  $d_j a_{ij} + d_i a_{ji} = 0$  para  $i \leq k$  ou  $j \leq k$ , onde  $D_0 = \text{diag}(d_{k+1}, \dots, d_n)$ .*

*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ ) Por (ii),  $A$  é obviamente dissipativa. Como  $\tilde{G}(A)$  não tem ciclos, considere-se, como no Lema 3.1.10,  $\{V_0, \dots, V_l\}$  partição de  $V$ , sendo  $V$  o conjunto de todos os vértices de  $\tilde{G}(A)$ .

Seja  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$  perturbação suficientemente pequena de  $A = (a_{ij})$  e considere-se a matriz  $\tilde{D} = \text{diag}(\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_n)$  definida recursivamente por

$$\tilde{d}_i = d_i, \quad \text{se } i \in V_0$$

e

$$\tilde{d}_i = -\tilde{d}_{i'} \frac{\tilde{a}_{ii'}}{\tilde{a}_{i'i}}, \quad \text{se } i \in V_j,$$

sendo  $i' \in V_{j-1}$  o único vértice de  $\tilde{G}(A)$  tal que a aresta  $[i, i']$  pertence ao grafo  $\tilde{G}(A)$ , com  $j \in \{1, \dots, l\}$ . Observe-se que se  $i \notin V_0$ ,  $\tilde{d}_i > 0$ , pois  $\tilde{d}_{i'} > 0$  e  $\tilde{a}_{ii'}$  e  $\tilde{a}_{i'i}$  têm sinais contrários.

Como  $\tilde{A}$  é perturbação de  $A$ , verifica-se que, por construção,  $\tilde{D}$  é perturbação de  $D$ , donde

$$[(\tilde{A}\tilde{D})_{ij}]_{k < i, j \leq n} < 0$$

e

$$\tilde{d}_i \tilde{a}_{i'i} + \tilde{d}_{i'} \tilde{a}_{ii'} = 0, \quad \text{para } i \leq k \text{ ou } j \leq k,$$

donde  $\tilde{A}$  é dissipativa e, consequentemente,  $A$  é estavelmente dissipativa.

( $\Rightarrow$ ) Considere-se agora  $A$  estavelmente dissipativa. Pelo Lema 3.1.5, tem-se que  $M$  é estavelmente dissipativa. Assim, do Teorema 3.1.6 e dos Lemas 3.1.7 e 3.1.8, podem-se deduzir as condições (i) e (ii).  $\square$

## 3.2 Redução da Dinâmica

Procura-se nesta secção estudar a dinâmica dos sistemas Lotka-Volterra estavelmente dissipativos com um ponto fixo positivo  $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ,

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_i \left( r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right), \\ r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j = 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Tem-se uma função de Liapunov dada por

$$V = \sum_{i=1}^n (x_i - q_i \log x_i). \quad (3.3)$$

Verifica-se que

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n a_{ij} (x_i - q_i) (x_j - q_j) \leq 0. \quad (3.4)$$

Se  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  é a matriz dada pelo Lema 3.1.3, pode-se usar a transformação  $x_i \mapsto \frac{1}{d_i} x_i$ , donde se pode assumir que  $A \leq 0$  e

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} w_i w_j = 0 \Rightarrow a_{ii} w_i = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.5)$$

Pelo Teorema 1.6.3 (Teorema de LaSalle [13]) existem soluções para todo o  $t \geq 0$  e o conjunto  $\{\dot{V} = 0\}$  contém um atractor. Assim, no sentido de se compreender a dinâmica do sistema (3.2), é útil estudar as soluções que satisfazem  $\dot{V} = 0$ . Por (3.2), (3.5) e (3.4), tem-se que as soluções no conjunto  $\dot{V} = 0$  satisfazem

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_j - q_j), \\ a_{ii} (x_i - q_i) = 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Observe-se que  $a_{ii} = 0$  ou  $a_{ii} < 0$ , e no segundo caso tem-se, consequentemente, que  $x_i = q_i$  no conjunto  $\{\dot{V} = 0\}$ .

Com o objectivo de se estudar a dinâmica do sistema (3.6) veja-se a descrição que Redheffer faz do atractor em termos do *grafo reduzido*. Modificando ligeiramente a noção anterior de grafo associado de um sistema, coloca-se uma bola  $\bullet$  no vértice  $i$  se  $x_i = q_i$  no conjunto  $\{\dot{V} = 0\}$  e uma bola  $\oplus$  no vértice  $i$  se for possível mostrar no processo de redução que  $x_i$  é constante no conjunto  $\{\dot{V} = 0\}$ . Caso contrário, coloca-se uma bola  $\circ$  no vértice  $i$ . Tem-se então o resultado seguinte, conforme [18].

**Lema 3.2.1.** *São válidas as seguintes regras de redução:*

- (a) *Se o vértice  $j$  tem uma bola  $\bullet$  ou  $\oplus$  e todos os vértices adjacentes ao  $j$  têm uma bola  $\bullet$  à excepção de um vértice  $l$ , então coloca-se uma bola  $\bullet$  no vértice  $l$ ;*
- (b) *Se o vértice  $j$  tem uma bola  $\bullet$  ou  $\oplus$  e todos os vértices adjacentes ao  $j$  têm uma bola  $\bullet$  ou  $\oplus$  à excepção de um vértice  $l$ , então coloca-se uma bola  $\oplus$  no vértice  $l$ ;*
- (c) *Se o vértice  $j$  tem um  $\circ$  e todos os vértices adjacentes ao  $j$  têm uma bola  $\bullet$  ou  $\oplus$ , então coloca-se uma bola  $\oplus$  no vértice  $j$ .*

*Demonstração.* A demonstração deste resultado segue da aplicação directa de (3.6).  $\square$

**Definição 3.2.2.** *Chama-se **grafo reduzido**  $R(A)$  do sistema, ao grafo que se obtém de  $G(A)$  pela aplicação sucessiva das regras de redução (a), (b) e (c) do Lema 3.2.1, até não se poder efectuar mais nenhuma alteração.*

A figura 3.1 mostra um exemplo de um grafo  $G(A)$  e do grafo reduzido  $R(A)$  respectivo, obtido pela aplicação sucessiva das regras de redução.

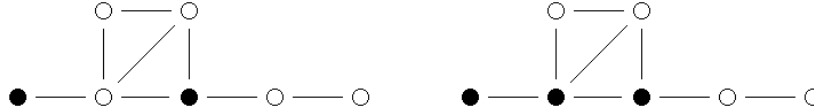


Figura 3.1: Um grafo  $G(A)$  e a sua forma reduzida  $R(A)$ .

Dado um grafo de uma matriz, o grafo reduzido que se obtém pela aplicação sucessiva das regras de redução é único, como se pode ver no lema seguinte (conforme [18]).

**Lema 3.2.3.** *O grafo reduzido  $R(A)$  é unicamente determinado pelo grafo  $G(A)$ .*

*Demonstração.* Escreva-se  $G$ ,  $R_1$  e  $R_2$  para  $G(A)$ ,  $R_1(A)$  e  $R_2(A)$ , respectivamente, onde  $R_1(A)$  e  $R_2(A)$  são dois grafos reduzidos de  $G(A)$ . Suponha-se que  $R_i$  para  $i \in \{1, 2\}$  é obtido pelo procedimento de redução  $P_i$ , ou seja

$$P_1G = R_1 \quad e \quad P_2G = R_2.$$

Cada procedimento de redução consiste na aplicação sucessiva das regras de redução (a), (b) e (c) do Lema 3.2.1, até não se poder efectuar mais nenhuma alteração, mas a ordem pela qual se usam as regras e o ponto do grafo  $G$  por onde se começa podem ser diferentes nos dois casos.

Relativamente a cada grafo, atribui-se o valor  $v(i)$  ao vértice  $i$ , que pode ser 0, 1 ou 2 se o vértice  $i$  é  $\circ$ ,  $\oplus$  ou  $\bullet$ , respectivamente. Define-se  $R_1 \geq R_2$  se  $v_1(i) \geq v_2(i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , onde  $v_j(i)$  é a avaliação do vértice  $i$  no grafo  $j$ .

Para ver que  $R_1 \geq R_2$ , aplique-se o procedimento  $P_2$  a  $R_1$ . Resulta que

$$R_1 = P_2R_1 \geq P_2G = R_2.$$

Observe-se que a primeira igualdade se verifica dado que  $R_1$  é um grafo reduzido, donde não pode ser mais reduzido por qualquer procedimento, incluindo  $P_2$ . A desigualdade segue de  $R_1 \geq G$  e do facto de que qualquer procedimento de redução aplicado a um grafo aumentar ou manter igual a avaliação de cada vértice desse grafo. A segunda igualdade segue da definição de  $R_2$ . Conclui-se então que  $R_1 \geq R_2$ .

Por simetria, tem-se que  $R_2 \geq R_1$  e conclui-se assim que  $R_1 = R_2$  como pretendido.  $\square$

Dada uma matriz  $A$ , diz-se que o grafo reduzido  $R(A)$  é do tipo  $(\bullet)$  se todos os vértices de  $R(A)$  são  $\bullet$ . Analogamente,  $R(A)$  diz-se do tipo  $(\bullet, \oplus)$  se todos os vértices são  $\bullet$  ou  $\oplus$ , existindo pelo menos um vértice que é  $\oplus$ . Finalmente,  $R(A)$  diz-se do tipo  $(\bullet, \oplus, \circ)$  se existe pelo menos um vértice que é  $\circ$ .

A partir desta designação, veja-se o resultado seguinte, devido a Redheffer e Walter [18], que caracteriza a estabilidade assintótica global de um sistema do tipo (3.2) em termos do grafo reduzido da sua matriz de interacção.



**Teorema 3.2.4.** *Seja  $A$  uma matriz estavelmente dissipativa e  $R(A)$  o seu grafo reduzido.*

- (a) *Se  $R(A)$  é do tipo  $(\bullet)$ , então  $A$  é invertível, o ponto fixo  $q$  é único e todas as soluções do sistema (3.2) satisfazem  $x(t) \rightarrow q$  quando  $t \rightarrow \infty$ .*
- (b) *Se  $R(A)$  é do tipo  $(\bullet, \oplus)$ , então  $A$  não é invertível, o ponto fixo  $q$  não é único, todas as soluções  $x$  do sistema (3.2) têm um limite quando  $t \rightarrow \infty$  e o limite depende da condição inicial  $x(0)$ .*
- (c) *Se  $R(A)$  é do tipo  $(\bullet, \oplus, \circ)$ , então existe uma matriz  $\tilde{A}$  estavelmente dissipativa, com  $G(\tilde{A}) = G(A)$ , tal que o sistema (3.2) associado à matriz  $\tilde{A}$  tem uma solução periódica não constante.*

A demonstração deste Teorema pode ser vista em [18].

Oliva *et al.* [3] mostraram a proposição seguinte, a qual segue de resultados de [20].

**Proposição 3.2.5.** *Seja  $K$  o subgrafo do grafo reduzido de um sistema Lotka-Volterra estavelmente dissipativo, formado por vértices com bolas  $\circ$  e  $\oplus$  e as arestas entre estes. Então  $K$  é uma floresta, i.e.,  $K = K_1 \cup \dots \cup K_r$  (disjuntos) onde cada  $K_i$  é uma árvore, i.e., não tem ciclos.*

*Demonstração.* Considere-se o subgrafo do grafo reduzido de um sistema Lotka-Volterra estavelmente dissipativo, formado por vértices com bolas  $\circ$  e  $\oplus$  e as arestas entre estes. Suponha-se que existe um ciclo nesse subgrafo cujos  $m$  vértices são sequencialmente etiquetados de 1 a  $m$ . Então,  $a_{ii} = 0$  para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ , donde, dados dois vértices adjacentes  $j$  e  $k$  do ciclo se tem

$$a_{jk} + a_{kj} = 0,$$

pois  $A \leq 0$ . Tem-se assim que o sistema reduzido cujo grafo seja o ciclo considerado é conservativo. Pela Proposição 2.3.1 tal pode suceder se, e só se,

$$a_{12} \cdots a_{(m-1)m} a_{m1} = (-1)^m a_{1m} a_{m(m-1)} \cdots a_{21}.$$

Claramente, esta condição não se verifica para todas as perturbações arbitrariamente pequenas, donde o sistema original não pode ser estavelmente dissipativo.  $\square$

Oliva *et al.* [3] usam a Proposição 3.2.5 para provar o teorema seguinte.

**Teorema 3.2.6.** *Considere-se o sistema Lotka-Volterra (2.3) restringido ao conjunto  $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Suponha-se que (i) o sistema tem um ponto fixo  $q \in \mathbb{R}_+^n$  e (ii) é estavelmente dissipativo. Então a dinâmica no conjunto  $\{\dot{V} = 0\}$  é hamiltoniana. Mais, pode ser descrita por um sistema Lotka-Volterra de dimensão  $m < n$ .*

*Demonstração.* Considere-se o sistema (em que  $A$  é a sua matriz de interação) restringido ao conjunto  $\{\dot{V} = 0\}$ . Separam-se as variáveis  $x_i$  em dois conjuntos,  $J_o$  e  $J_\bullet$ . No conjunto  $\{x_i\}_{i \in J_o}$  tem-se todos os  $x_i$  correspondentes aos vértices do grafo reduzido  $R(A)$  que têm  $\circ$  ou  $\oplus$ , e no conjunto  $\{x_i\}_{i \in J_\bullet}$  tem-se todos os  $x_i$  correspondentes aos vértices do grafo reduzido  $R(A)$  que têm  $\bullet$ . Para  $i \in J_\bullet$  tem-se  $x_i = q_i$ , donde o sistema restringido satisfaz

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_i \left( r_i + \sum_{j \in J_\bullet} a_{ij} q_j \right) + \sum_{j \in J_o} a_{ij} x_i x_j, & \text{se } i \in J_o \\ x_i = q_i, & \text{se } i \in J_\bullet. \end{cases} \quad (3.7)$$

Assim, se se definir  $\tilde{r}_i = r_i + \sum_{j \in J_\bullet} a_{ij} q_j$  e  $\tilde{a}_{ij} = a_{ij}$  para  $i, j \in J_o$ , obtém-se um novo sistema Lotka-Volterra:

$$\dot{x}_i = x_i \left( \tilde{r}_i + \sum_{j \in J_o} \tilde{a}_{ij} x_j \right), \quad i \in J_o \quad (3.8)$$

onde o grafo associado à matriz  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{i,j \in J_o}$  é precisamente o subgrafo  $K$  do grafo reduzido  $R(A)$  constituído pelos vértices  $\circ$  e  $\oplus$  e as arestas entre estes. Observando-se que esta matriz satisfaz  $\tilde{a}_{ii} = 0$  para todo o  $i \in J_o$  e que existe uma matriz diagonal  $D > 0$  tal que  $\tilde{A}D \leq 0$ , tem-se

$$d_j \tilde{a}_{ij} + d_i \tilde{a}_{ji} = 0,$$

donde

$$\tilde{a}_{ij} \neq 0 \Rightarrow \tilde{a}_{ij} \tilde{a}_{ji} < 0.$$

Observe-se ainda que  $(q_i)_{i \in J_o}$  é uma solução do sistema

$$\tilde{r}_i + \sum_{j \in J_o} \tilde{a}_{ij} q_j = 0, \quad i \in J_o.$$

Pela Proposição 3.2.5, está-se nas condições do Corolário 2.4.11, donde o sistema (3.8) tem uma formulação hamiltoniana.  $\square$

A demonstração deste Teorema mostra que a dinâmica no atrator pode ser descrita por um sistema Lotka-Volterra de dimensão  $m < n$  cujo grafo associado é uma árvore, o qual é conservativo e tem um ponto fixo em  $\mathbb{R}_+^m$ . Reciprocamente, um sistema desta natureza descreve um atrator, dado que qualquer sistema cujo grafo associado é uma árvore é estavelmente dissipativo.

### 3.3 Característica do Grafo

Dada uma matriz  $A$ , recorde-se que se diz que o grafo reduzido  $R(A)$  é do tipo  $(\bullet, \oplus, \circ)$  se existe pelo menos um vértice que é  $\circ$ .

**Proposição 3.3.1.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  estavelmente dissipativa com um grafo  $G(A)$  sem ligações fortes (i.e, não existem em  $G(A)$  dois vértices com  $\bullet$  ligados por uma aresta). Então, qualquer outra matriz  $B$  estavelmente dissipativa com o mesmo grafo, satisfaz*

$$\text{rank}(B) = \text{rank}(A).$$

*Demonstração.* Designemos as entradas não nulas de  $A$  por parâmetros  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Seja  $B$  uma matriz obtida de  $A$  por eliminação de Gauss sem troca de linhas. Suponhamos que, para cada  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $B$  satisfaz:

- 1)  $b_{ij}$  é um monómio nos coeficientes não nulos de  $A$ , da forma  $b_{ij} = \alpha^m \beta^p$ , com  $m, p \in \mathbb{Z}$ ;
- 2) se  $b_{ij} \neq 0$ , existe em  $G(A)$  um caminho que liga os vértices  $i$  e  $j$ .

Queremos mostrar, por um argumento indutivo, que a cada passo do método de eliminação de Gauss, a matriz obtida satisfaz as propriedades 1) e 2).

O método de eliminação de Gauss sem troca de linhas consiste em duas regras:

$$R_1) \quad L'_i = \frac{1}{b_{ij}} L_i;$$

$$R_2) \quad L'_l = L_l - \frac{b_{lj}}{b_{ij}} L_i.$$

Se  $B$  tiver entrada  $b_{ij} \neq 0$ , a regra  $R_1$ ) serve para que a matriz transformada  $B'$  tenha um “pivot”  $b'_{ij} = 1$  nesta entrada. É óbvio que esta regra preserva as propriedades 1) e 2) acima.

Usando a entrada  $b_{ij} \neq 0$  de  $B$  como “pivot”, a regra  $R_2$ ) serve para anular a entrada  $b'_{lj}$  da matriz transformada  $B'$ . Supondo que todas as entradas de  $B$  satisfazem 1) e 2) acima, vejamos que o mesmo acontece com a entrada

$$b'_{lm} = b_{lm} - \frac{b_{lj}}{b_{ij}} b_{im}$$

de  $B'$ . Como  $b_{ij} \neq 0$  e da hipótese de inexistência de ligações fortes, resulta que o grafo  $G(A)$  não tem ciclos (conforme Proposição 3.1.8). Temos assim que

$$b'_{lm} = 0 \quad \text{ou} \quad b_{lj} = 0 \quad \text{ou} \quad b_{im} = 0.$$

Sendo não nulas estas entradas, por 2) aplicada à matriz  $B$ , existiria um ciclo

$$l - m - i - j - l.$$

Caso  $b_{lm} = 0$ , temos  $b'_{lm} = -\frac{b_{lj}}{b_{ij}} b_{im}$  e as propriedades 1) e 2) são satisfeitas nesta entrada. Note-se que se  $b'_{lm} \neq 0$ , então existe a cadeia

$$l - j - i - m.$$

Nos outros dois casos,  $b_{lj} = 0$  ou  $b_{im} = 0$ , temos  $b'_{lm} = b_{lm}$  e as propriedades 1) e 2) mantêm-se.

Completada a prova de que a cada passo do método de eliminação de Gauss, a matriz obtida satisfaz as propriedades 1) e 2), resta-nos concluir a demonstração da Proposição.

Por eliminação de Gauss sem troca de linhas podemos transformar  $A$  numa matriz  $B$  tal que  $PB$  é uma matriz em escada (de linhas), para uma certa matriz de permutação  $P$ .  $PB$  obtém-se de  $B$  por permutação das linhas de  $B$ . Como os “pivots” de  $B$ , i.e, as entradas de  $B$  que correspondem aos “pivots” de  $PB$ , são monômios nas entradas  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  de  $A$ , temos que o  $\text{rank}(A)$  não depende dos valores concretos destes parâmetros não nulos, o que termina a demonstração.  $\square$

Esta Proposição permite-nos definir a característica ou *rank* de um grafo como sendo a característica de todas as matrizes estavelmente dissipativas que partilham esse grafo.

**Exemplo 3.3.2.** *Vejam-se alguns exemplos.*

$$\begin{aligned}
\text{rank} \quad (\circ - \circ) &= 2 \\
\text{rank} \quad (\circ - \circ - \circ) &= 2 \\
\text{rank} \quad (\circ - \circ - \circ - \circ) &= 4 \\
\text{rank} \quad (\bullet - \circ - \bullet) &= 3 \\
\text{rank} \quad (\circ - \bullet - \circ) &= 2 \\
\text{rank} \quad (\circ - \circ - \bullet - \circ - \circ) &= 5 \\
\text{rank} \quad (\circ - \circ - \circ - \bullet - \circ - \circ - \circ) &= 6
\end{aligned}$$

Conjecturamos que a Proposição 3.3.1 permaneça válida sem a restrição de  $G(A)$  não ter ligações fortes.

### 3.4 Discussão e Exemplos

Considere-se um sistema Lotka-Volterra estavelmente dissipativo de dimensão  $n$  com um ponto fixo  $q \in \mathbb{R}_+^n$  e com  $A$  a sua matriz de interação. Conforme [3], o atrator está contido no conjunto  $\{\dot{V} = 0\}$  em que  $V$  é uma função de Liapunov dada por

$$V = \sum_{i=1}^n (x_i - q_i \log x_i).$$

Pelo algoritmo de Redheffer aplicado ao grafo  $G(A)$  tem-se que o atrator, que designamos por  $\Gamma(A)$ , está contido no conjunto

$$\mathcal{C}_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = q_i, \quad \forall i = \bullet\}, \quad (3.9)$$

que designamos por **Conjunto Redheffer**. Pelo Teorema 3.2.6 tem-se que a dinâmica no conjunto  $\{\dot{V} = 0\}$  é hamiltoniana e pode ser descrita por um sistema Lotka-Volterra  $\widetilde{LV}$  de dimensão  $m < n$ .

Zhao e Luo em [29] mostram que para sistemas de Lotka-Volterra estavelmente dissipativos de dimensão 5 há quatro tipos possíveis de atrator:

- 1) um único ponto fixo globalmente atractivo;
- 2) o sistema é Hamiltoniano e o atractor é todo o espaço de fases;
- 3) existe uma folheação invariante e a intersecção de cada folha com o atractor consiste de um único ponto fixo, globalmente atractivo nessa folha;
- 4) o atractor é um subespaço afim invariante onde o sistema é Hamiltoniano.

Em dimensões inferiores a 5 é também fácil de obter uma caracterização completa dos possíveis atractores. Será interessante conseguir-se caracterizar o atractor em sistemas de Lotka-Volterra estavelmente dissipativos de dimensão arbitrária. Mais precisamente, será um importante objectivo de estudo mostrar que em sistemas Lotka-Volterra estavelmente dissipativos de dimensão arbitrária o atractor tem de ser de um dos quatro tipos acima descritos.

Veja-se agora em que condições é que  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$ , conforme definido acima, é LV-invariante, i.e, é invariante para um sistema Lotka-Volterra estavelmente dissipativo de dimensão  $n$  com um ponto fixo  $q \in \mathbb{R}_+^n$  e com  $A$  a sua matriz de interacção. Considere-se

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n, \text{ com } x_1 \in \mathbb{R}^k \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_2 = q_2\}.$$

Considere-se ainda

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right]$$

em que  $A_{11}$  é a submatriz  $k \times k$  cujo grafo é constituído pelos vértices com  $\circ$  ou  $\oplus$  do grafo  $G(A)$  e  $A_{22}$  é a submatriz  $(n - k) \times (n - k)$  cujo grafo é constituído pelos vértices com  $\bullet$  do grafo  $G(A)$ . Tem-se então em  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$ ,

$$\begin{aligned} LV &= x * A(x - q) \\ &= (x_1, x_2) * \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \end{bmatrix} \\ &= \left( x_1 * \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \end{bmatrix}, x_2 * \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \left( x_1 * A_{11}(x_1 - q_1), x_2 * A_{21}(x_1 - q_1) \right) \quad (\text{pois em } \mathcal{C}_{\mathcal{R}}, x_2 = q_2), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} C_R \text{ é LV-invariante} &\iff x_2 * A_{21}(x_1 - q_1) = 0 \\ &\iff A_{21} = [0]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

**Definição 3.4.1.** Considere-se  $G = (V, A)$  e  $G_0 = (V_0, A_0)$  dois grafos em que  $V$  e  $A$  são os conjuntos de todos os vértices e arestas, respectivamente, de  $G$  e  $V_0$  e  $A_0$  são os conjuntos de todos os vértices e arestas, respectivamente, de  $G_0$ .  $G_0$  diz-se um **subgrafo** de  $G$  se  $V_0 \subseteq V$  e  $A_0 = \{[i, j] \in A : i, j \in V_0\}$ , em que  $[i, j]$  representa a aresta que liga o vértice  $i$  ao vértice  $j$ .

Nestas condições,  $G_0$  diz-se um **grafo parcial** de  $G$  se  $V_0 = V$  e  $A_0 \subseteq A$ .

No sentido de fixar notação para o que se segue, nota-se por  $R_\bullet(A)$  o subgrafo de  $R(A)$  gerado pelos vértices  $\bullet$  e por  $R_\circ(A)$  o subgrafo de  $R(A)$  gerado pelos vértices  $\circ$  e  $\oplus$ .

**Proposição 3.4.2.** Seja  $A$  uma matriz estavelmente dissipativa tal que  $\mathcal{C}_R = \Gamma(A)$ , então  $R(A) = R_\circ(A) \sqcup R_\bullet(A)$  (i.e.,  $R(A)$  é a união disjunta dos subgrafos  $R_\circ(A)$  e  $R_\bullet(A)$ ).

*Demonstração.* Considerando-se uma transformação de calibre, conforme descrito na secção 2.3 (Capítulo 2), pode-se supor que  $A \leq 0$ . Neste caso,  $A$  é da forma

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} U & -R^T \\ \hline R & M \end{array} \right],$$

em que  $U$  é a matriz  $k \times k$  cujo grafo é constituído pelos vértices com  $\circ$  ou  $\oplus$  do grafo  $R(A)$  e  $M$  é a matriz  $(n - k) \times (n - k)$  cujo grafo é constituído pelos vértices com  $\bullet$  do grafo  $R(A)$ .

Pelo Teorema 3.2.4, tem-se que  $M$  é definida negativa ( $M < 0$ ).

Pelo que se viu acima, nomeadamente por (3.10), como  $\mathcal{C}_R = \Gamma(A)$ , tem-se que  $R = 0$ . Logo

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 & M \end{array} \right],$$

donde  $R(A) = R_\circ(A) \sqcup R_\bullet(A)$ . □

Desta Proposição tem-se facilmente o seguinte Corolário.

**Corolário 3.4.3.** *Se a matriz  $A$  é estavelmente dissipativa e  $G(A)$  é conexo, então  $\Gamma(A) = \{q\} = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$  ou  $\Gamma(A) \subsetneq \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$ .*

Pelo que se viu na secção 3.1 e pelas respectivas definições, verifica-se que os sistemas dissipativos incluem os sistemas estavelmente dissipativos e os sistemas conservativos. No entanto, como se poderá ver pela Proposição abaixo, os sistemas que são conservativos e estavelmente dissipativos podem ser facilmente caracterizados.

No sentido da definição de perturbação de uma matriz (definição 3.1.1), também se podem definir os sistemas que são conservativos e que ao serem perturbados mantêm as suas propriedades.

**Definição 3.4.4.** *Um sistema Lotka-Volterra com matriz de interacção  $A$  diz-se **estavelmente conservativo** (e neste caso a matriz  $A$  diz-se **estavelmente conservativa**) se qualquer perturbação suficientemente pequena  $\tilde{A}$  de  $A$  é conservativa, i.e.,*

$$\exists \epsilon > 0 : \max_{i,j} |a_{ij} - \tilde{a}_{ij}| < \epsilon \Rightarrow \tilde{A} \text{ é conservativa.}$$

Dada uma matriz  $A$ , diz-se que o grafo reduzido  $R(A)$  é do tipo (o) se todos os vértices de  $R(A)$  são o. Pela caracterização das matrizes estavelmente dissipativas, verifica-se facilmente a seguinte Proposição.

**Proposição 3.4.5.** *Um sistema estavelmente dissipativo tem um grafo reduzido associado do tipo (o) se, e só se, o sistema é estavelmente conservativo.*

**Exemplo 3.4.6.** *O sistema*

$$E_1 = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_2 - 1) \\ \dot{x}_2 = -2x_2(x_1 - 1), \end{cases}$$

*com matriz de interacção*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

*e ponto fixo*

$$q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*tem o grafo reduzido associado  $R(A)$ , conforme representado na figura 3.2.*





Figura 3.2: Grafo  $R(A)$  associado da matriz  $A$ .

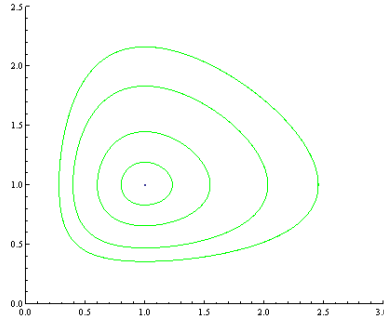


Figura 3.3: Retrato de fase do sistema  $E_1$ .

*Este é um exemplo de um sistema Predador-Presa (descrito na secção 2.1 do Capítulo 2). Na figura 3.3 pode ver-se o retrato de fase deste sistema. Verifica-se facilmente que este sistema é estavelmente dissipativo e como o seu grafo reduzido associado é do tipo (o), pela Proposição anterior tem-se que é um sistema estavelmente conservativo.*

**Exemplo 3.4.7.** *O sistema*

$$E_2 = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_2 - 1) \\ \dot{x}_2 = x_2(-2(x_1 - 1) + (x_3 - 1)) \\ \dot{x}_3 = -x_3(x_2 - 1), \end{cases}$$

*com matriz de interacção*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

*e ponto fixo*

$$q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*tem o grafo reduzido associado  $R(A)$ , conforme representado na figura 3.4.*

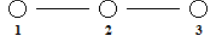


Figura 3.4: Grafo  $R(A)$  associado da matriz  $A$ .

Na figura 3.5, que representa algumas órbitas do sistema, podem-se observar três exemplos de folhas, em que cada uma intersecta transversalmente o subespaço afim das singularidades, num único ponto, conforme Teorema 2.6.7. Pode-se também ver na figura que em cada folha, as órbitas do sistema são periódicas.

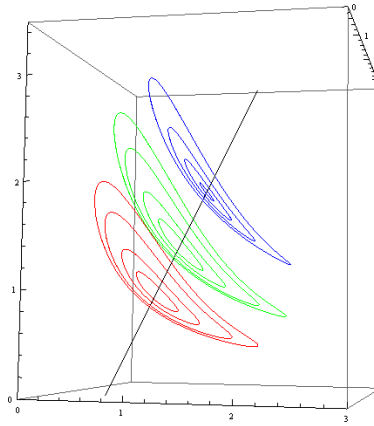


Figura 3.5: Representação de algumas órbitas em 3 folhas do sistema  $E_2$ .

Verifica-se facilmente que este sistema é estavelmente dissipativo e como o seu grafo reduzido associado é do tipo  $(\circ)$ , pela Proposição anterior tem-se que é um sistema estavelmente conservativo.

**Exemplo 3.4.8.** O sistema

$$E_3 = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_2 - 1) \\ \dot{x}_2 = x_2(-2(x_1 - 1) + (x_3 - 1)) \\ \dot{x}_3 = x_3(-(x_2 - 1) + 2(x_4 - 1)) \\ \dot{x}_4 = -x_4(x_3 - 1), \end{cases}$$

com matriz de interacção

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e ponto fixo

$$q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tem o grafo reduzido associado  $R(A)$ , conforme representado na figura 3.6.

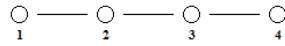


Figura 3.6: Grafo  $R(A)$  associado da matriz  $A$ .

Na figura 3.7 pode-se ver o comportamento da solução deste sistema para uma dada condição inicial. Observa-se claramente um padrão sinusoidal em torno do estado de equilíbrio, que se repete ao longo do tempo, padrão este representativo de uma órbita quase periódica num toro invariante, típica dos sistemas conservativos.

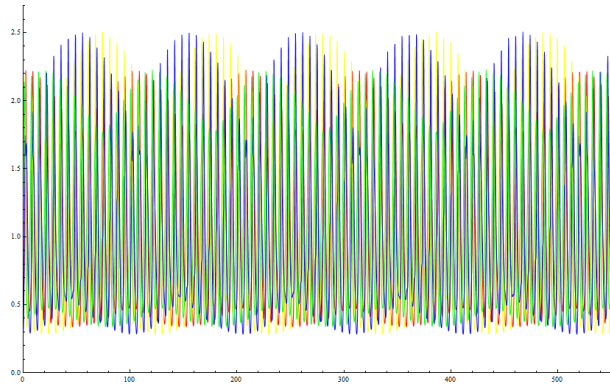


Figura 3.7: Representação da solução do sistema  $E_3$  para uma dada condição inicial.

Verifica-se facilmente que este sistema é estavelmente dissipativo e como o seu grafo reduzido associado é do tipo  $(\circ)$ , pela Proposição anterior tem-se

que é um sistema estavelmente conservativo.

Dada uma matriz  $A$ , recorde-se que se diz que o grafo reduzido  $R(A)$  é do tipo  $(\bullet)$  se todos os vértices de  $R(A)$  são  $\bullet$ . Neste sentido, a alínea (a) do Teorema 3.2.4 pode ser formalizada da seguinte forma.

**Proposição 3.4.9.** *Todo o grafo reduzido do tipo  $(\bullet)$  corresponde a um sistema com um ponto fixo globalmente atractivo e neste caso, a matriz do sistema é invertível.*

**Exemplo 3.4.10.** *O sistema*

$$E_4 = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(-(x_1 - 1) - 2(x_2 - 1)) \\ \dot{x}_2 = x_2(2(x_1 - 1) - 3(x_3 - 1)) \\ \dot{x}_3 = x_3(3(x_2 - 1) - (x_3 - 1)), \end{cases}$$

com matriz de interacção

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

e ponto fixo

$$q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tem o grafo associado  $G(A)$  e o reduzido  $R(A)$ , conforme representado na figura 3.8.



Figura 3.8: Grafo  $G(A)$  associado da matriz  $A$  e o seu reduzido  $R(A)$ .

Na figura 3.9 podem-se ver algumas órbitas deste sistema, que independentemente da sua condição inicial, convergem para o ponto fixo, conforme Proposição 3.4.9.

Observe-se que as órbitas deste sistema (ver figura 3.9), independentemente da condição inicial, à medida que vão convergindo para o ponto fixo, vão

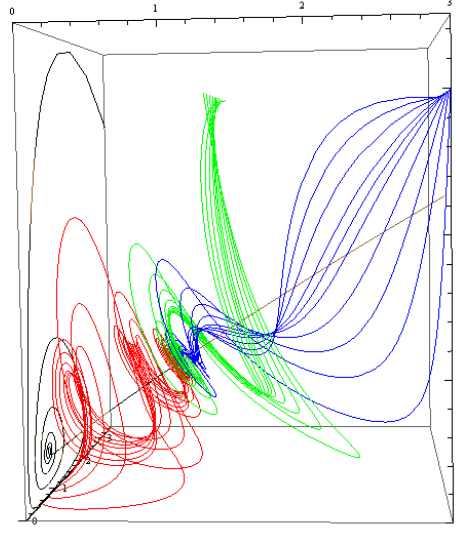


Figura 3.9: Representação de algumas órbitas do sistema  $E_4$ .

contornando de forma circular a variedade estável forte,  $W_q^{ss}$ , do sistema  $x * A(x - q)$  em  $q = (1, 1, 1)$  (representada a castanho na figura 3.9).

A matriz  $A$  é um exemplo específico de matrizes do tipo

$$B = \begin{bmatrix} -a & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & -b \end{bmatrix}, \quad \text{com } \alpha, \beta, a, b > 0.$$

Verifica-se facilmente que a matriz  $B$  é invertível, pois

$$\det(B) = -(b\alpha^2 + a\beta^2) \neq 0.$$

Dada uma matriz  $A$ , recorde-se que se diz que o seu grafo reduzido  $R(A)$  é do tipo  $(\bullet, \oplus)$  se todos os vértices de  $R(A)$  são  $\bullet$  ou  $\oplus$ , existindo pelo menos um vértice que é  $\oplus$ . Neste sentido, pode-se dizer um pouco mais do que o Teorema 3.2.4 afirma, como se pode ver pela Proposição seguinte.

**Proposição 3.4.11.** *Seja  $A$  uma matriz estavelmente dissipativa e  $R(A)$  o seu grafo reduzido. Se  $R(A)$  é do tipo  $(\bullet, \oplus)$  então o sistema com  $A$  matriz de interação tem uma folheação invariante e um único ponto fixo globalmente atractivo em cada folha.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.2.4, tem-se que  $A$  é singular e que toda a órbita converge para um ponto fixo que depende do estado inicial.

Pela Proposição 2.6.7, para cada folha  $\mathcal{F}_c$  de  $\mathcal{F}$ , tem-se que

$$\mathcal{F}_c \cap \Sigma(A) = \{p\},$$

onde  $p$  é um ponto fixo do sistema.

Logo, para cada  $x_0 \in \mathcal{F}_c$  tem-se que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x_0) = p.$$

□

**Observação 3.4.12.** *Observe-se que neste caso*

$$\Gamma(A) = \Sigma(A) = \{x : A(x - q) = 0\}.$$

**Exemplo 3.4.13.** *O sistema*

$$E_5 = \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1(x_2 - 1) \\ \dot{x}_2 = x_2(-3(x_1 - 1) - (x_2 - 1) + 2(x_3 - 1)) \\ \dot{x}_3 = -2x_3(x_2 - 1), \end{cases}$$

*com matriz de interação*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

*e ponto fixo*

$$q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*tem o grafo associado  $G(A)$  e o reduzido  $R(A)$ , conforme representado na figura 3.10.*

*Na figura 3.11, que representa algumas órbitas do sistema, podem-se observar três exemplos de folhas, em que cada uma intersecta transversalmente*



Figura 3.10: Grafo  $G(A)$  associado da matriz  $A$  e o seu reduzido  $R(A)$ .

o subespaço afim das singularidades, num único ponto, conforme Teorema 2.6.7. Pode-se também ver na figura que em cada folha as órbitas do sistema convergem para o único ponto fixo da respectiva folha, conforme Proposição 3.4.11.

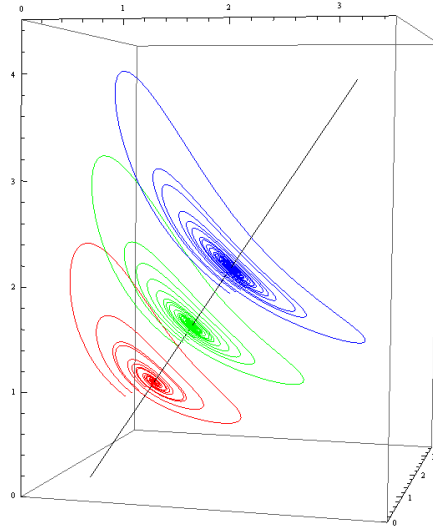


Figura 3.11: Representação de algumas órbitas do sistema  $E_5$ .

*Este exemplo apresentado, é um caso específico da classe de exemplos com matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & -a & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com } \alpha, \beta, a \neq 0.$$

**Exemplo 3.4.14.** *O sistema*

$$E_6 = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_2 - 1) \\ \dot{x}_2 = x_2(-2(x_1 - 1) + (x_3 - 1)) \\ \dot{x}_3 = x_3(-(x_2 - 1) - (x_3 - 1) + (x_4 - 1)) \\ \dot{x}_4 = x_4(-(x_3 - 1) + (x_5 - 1)) \\ \dot{x}_5 = -2x_5(x_4 - 1), \end{cases}$$

com matriz de interacção

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

e ponto fixo

$$q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tem o grafo associado  $G(A) = R(A)$ , conforme representado na figura 3.12.

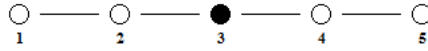


Figura 3.12: Grafo associado da matriz  $A$ ,  $G(A) = R(A)$ .

Na figura 3.13 pode-se ver o comportamento da solução deste sistema para uma dada condição inicial. Observa-se claramente um padrão sinusoidal em torno do ponto de equilíbrio das componentes  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$ , que se repete ao longo do tempo, padrão este representativo de órbitas quase periódicas em toros invariantes, típicas dos sistemas conservativos. Observa-se ainda a convergência de  $x_3$  para o estado de equilíbrio, o que dá a caracterização dissipativa ao sistema.

Neste exemplo o conjunto Redheffer é dado por

$$\mathcal{C}_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_5 = 1\},$$

e tem dimensão 4, sendo o atrator  $\Gamma$  um 2-plano do tipo Predador-Presa.

**Exemplo 3.4.15.** Perturbando o sistema do exemplo 3.4.14 tem-se o sistema

$$E_7 = \begin{cases} \dot{x}_1 = 0.9x_1(x_2 - 1) \\ \dot{x}_2 = x_2(-2(x_1 - 1) + (x_3 - 1)) \\ \dot{x}_3 = x_3(-(x_2 - 1) - (x_3 - 1) + (x_4 - 1)) \\ \dot{x}_4 = x_4(-(x_3 - 1) + (x_5 - 1)) \\ \dot{x}_5 = -2x_5(x_4 - 1), \end{cases}$$



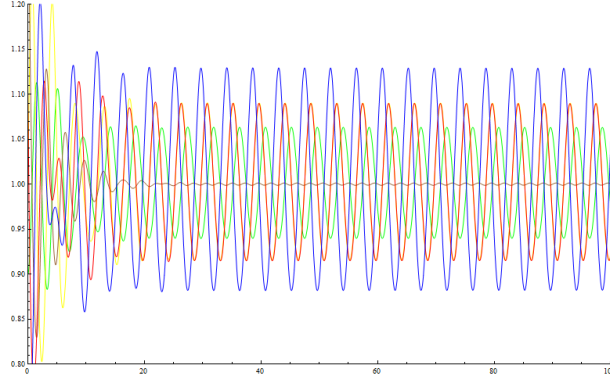


Figura 3.13: Representação da solução do sistema  $E_6$  para uma dada condição inicial.

com matriz de interação

$$A = \left[ \begin{array}{cc|c|cc} 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

e ponto fixo

$$q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

com o grafo associado  $G(A) = R(A)$  igual ao do exemplo 3.4.14, conforme representado na figura 3.12.

Na figura 3.14 pode-se ver o comportamento da solução deste sistema para uma dada condição inicial. Observa-se claramente um padrão sinusoidal em torno do ponto de equilíbrio das componentes  $x_1, x_2, x_3, x_4$  e  $x_5$ , convergente para o estado de equilíbrio.

Neste exemplo, o conjunto Redheffer é o mesmo que o do exemplo 3.4.14, dado por

$$\mathcal{C}_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_5 = 1\},$$

e tem dimensão 4, sendo o atrator  $\Gamma = \{q\}$ .

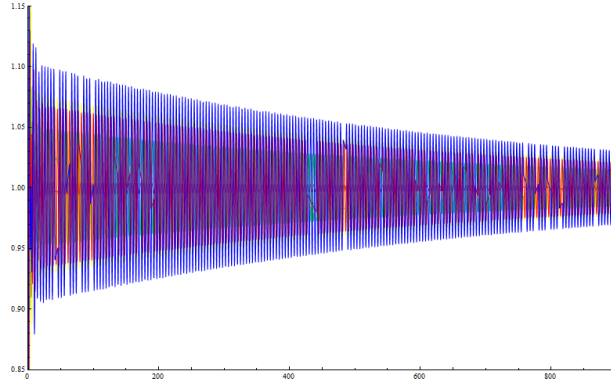


Figura 3.14: Representação da solução do sistema  $E_7$  para uma dada condição inicial.

**Exemplo 3.4.16.** *O sistema*

$$E_8 = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1((x_2 - 1) + (x_7 - 1)) \\ \dot{x}_2 = x_2(-2(x_1 - 1) + (x_3 - 1)) \\ \dot{x}_3 = -x_3(x_2 - 1) \\ \dot{x}_4 = x_4((x_5 - 1) - (x_7 - 1)) \\ \dot{x}_5 = x_5(-2(x_4 - 1) + (x_6 - 1)) \\ \dot{x}_6 = -x_6(x_5 - 1) \\ \dot{x}_7 = x_7(-(x_1 - 1) + (x_4 - 1) - (x_7 - 1)), \end{cases}$$

com matriz de interação

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

e ponto fixo

$$q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tem o grafo associado  $G(A) = R(A)$ , conforme representado na figura 3.15.

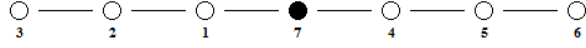


Figura 3.15: Grafo associado da matriz  $A$ ,  $G(A) = R(A)$ .

Na figura 3.16 pode-se ver o comportamento da solução deste sistema para uma dada condição inicial. Observa-se claramente um padrão sinusoidal em torno do estado de equilíbrio das componentes  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4, x_5, x_6$ , que se repete ao longo do tempo, padrão este representativo dos sistemas conservativos, e a convergência de  $x_7$  para o estado de equilíbrio, o que dá a caracterização dissipativa ao sistema.

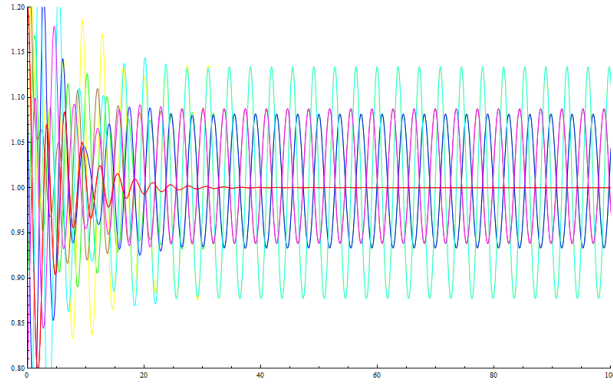


Figura 3.16: Representação da solução do sistema  $E_8$  para uma dada condição inicial.

O retrato de fase deste sistema pode ser representado como na figura 3.17, e neste caso existe uma folheação  $\mathcal{F}$  invariante de dimensão 6 em  $\mathbb{R}^7$ , sendo o atrator um 3-plano transversal a  $\mathcal{F}$ , dado por

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^7 : x_1 = x_4, x_2 = x_5, x_3 = x_6, x_7 = 1\}.$$

Temos que o  $\text{Nuc}(A)$  é o espaço gerado pelo vector  $(1, 0, 2, 1, 0, 2, 0)$ , donde para cada  $c = \text{constante}$ , as folhas  $\mathcal{F}_c$  de  $\mathcal{F}$  são dadas por

$$\mathcal{F}_c = \{x \in \mathbb{R}^7 : \log x_1 + 2 \log x_3 + \log x_4 + 2 \log x_6 = c\}.$$

A intersecção de cada folha  $\mathcal{F}_c$  de  $\mathcal{F}$  com  $\Gamma$  é uma superfície  $\mathcal{S}_c$  dada por

$$\mathcal{S}_c = \mathcal{F}_c \cap \Gamma = \{(x_1, x_2, x_3, x_1, x_2, x_3, 1) : \log x_1 + 2 \log x_3 = \frac{c}{2}\},$$

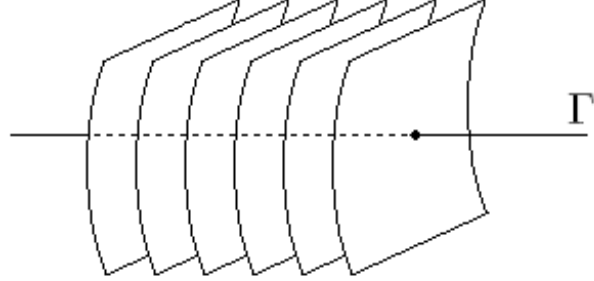


Figura 3.17: Retrato de fase de um sistema do tipo do sistema  $E_8$ .

folheada por curvas invariantes.  $\mathcal{S}_c$  corresponde a uma folha invariante do sistema conservativo com grafo  $\circ - \circ - \circ$  (ver figura 3.5).  $\mathcal{S}_c$  é o atrator do sistema restrito à folha  $\mathcal{F}_c$  de  $\mathcal{F}$ .

**Exemplo 3.4.17.** Perturbando o sistema do exemplo 3.4.16 tem-se o sistema

$$E_9 = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1((x_2 - 1) + (x_7 - 1)) \\ \dot{x}_2 = x_2(-2(x_1 - 1) + (x_3 - 1)) \\ \dot{x}_3 = -x_3(x_2 - 1) \\ \dot{x}_4 = x_4(0.9(x_5 - 1) - (x_7 - 1)) \\ \dot{x}_5 = x_5(-2(x_4 - 1) + (x_6 - 1)) \\ \dot{x}_6 = -x_6(x_5 - 1) \\ \dot{x}_7 = x_7(-(x_1 - 1) + (x_4 - 1) - (x_7 - 1)), \end{cases}$$

com matriz de interacção

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

e ponto fixo

$$q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tem o grafo associado  $G(A) = R(A)$ , igual ao do exemplo 3.4.16, conforme representado na figura 3.15.

Na figura 3.18 pode-se ver o comportamento da solução deste sistema para uma dada condição inicial. Observa-se claramente um padrão sinusoidal em torno do ponto de equilíbrio das componentes  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  e  $x_7$ , convergente para o estado de equilíbrio.

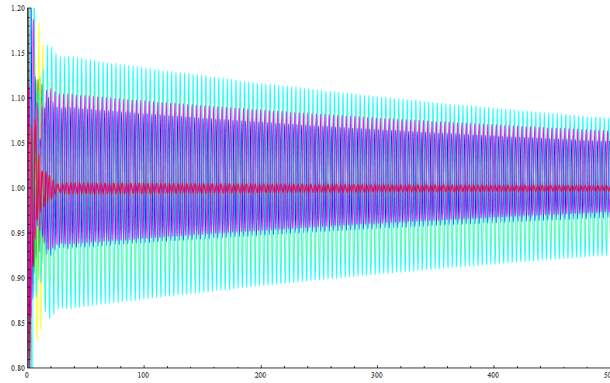


Figura 3.18: Representação da solução do sistema  $E_9$  para uma dada condição inicial.

*Este exemplo obtém-se perturbando o exemplo 3.4.16 por quebra de simetria. Neste caso*

$$\Gamma = \Sigma \quad (\text{recta de pontos de equilíbrio}).$$

Conjecturamos que o atrator  $\Gamma$  de um sistema estavelmente dissipativo seja sempre a intersecção de um subespaço afim, contendo o conjunto dos pontos de equilíbrio  $\Sigma$ , com o espaço de fases  $\mathbb{R}_+^n$ .

Motivados pelo exemplo 3.4.16, vamos agora procurar uma classe de sistemas Lotka-Volterra estavelmente dissipativos de dimensão  $n$  com um ponto fixo

$q \in \mathbb{R}_+^n$  que deixam invariante o conjunto

$$\mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_{k+1}, x_2 = x_{k+2}, \dots, x_k = x_{2k}, x_{2k+1} = 1\},$$

com  $k$  um inteiro positivo.

Considere-se a matriz

$$A = \left[ \begin{array}{c|c|c} B & 0 & u \\ \hline 0 & C & v \\ \hline -u^T & -v^T & -1 \end{array} \right], \quad \text{com} \quad u = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

em que  $B = (b_{ij})$  e  $C = (c_{ij})$  são matrizes  $k \times k$  e  $\alpha$  e  $\beta$  são reais não nulos.

Tem-se

$$\dot{x}_1 = x_1 \left( \sum_{j=1}^k b_{1j}(x_j - 1) + \alpha(x_{2k+1} - 1) \right)$$

e

$$\dot{x}_{k+1} = x_{k+1} \left( \sum_{j=1}^k c_{1j}(x_{k+j} - 1) + \beta(x_{2k+1} - 1) \right)$$

mas como  $x_1 = x_{k+1}$  e  $x_{2k+1} = 1$ , vem

$$\sum_{j=1}^k b_{1j}(x_j - 1) = \sum_{j=1}^k c_{1j}(x_j - 1). \quad (3.11)$$

Analogamente, para todo o  $i \in \{2, \dots, k\}$  tem-se

$$\dot{x}_i = x_i \left( \sum_{j=1}^k b_{ij}(x_j - 1) \right)$$

e

$$\dot{x}_{k+i} = x_{k+i} \left( \sum_{j=1}^k c_{ij}(x_{k+j} - 1) \right)$$

mas como para cada  $i$ ,  $x_i = x_{k+i}$ , vem

$$\sum_{j=1}^k b_{ij}(x_j - 1) = \sum_{j=1}^k c_{ij}(x_j - 1). \quad (3.12)$$

Tem-se ainda

$$\dot{x}_{2k+1} = x_{2k+1} \left( -\alpha(x_1 - 1) - \beta(x_{k+1} - 1) - (x_{2k+1} - 1) \right),$$

mas como  $x_1 = x_{k+1}$  e  $x_{2k+1} = 1$ , vem

$$0 = \alpha(x_1 - 1) + \beta(x_1 - 1). \quad (3.13)$$

Das condições (3.11), (3.12) e (3.13), verifica-se que se  $b_{ij} = c_{ij}$  para todo o  $1 \leq i, j \leq k$  e  $\beta = -\alpha$ , o sistema cuja matriz de interacção é

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} B & 0 & u \\ \hline 0 & B & -u \\ \hline -u^T & u^T & -1 \end{array} \right], \quad \text{com} \quad u = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

deixa o conjunto  $\mathcal{I}$  invariante.

Pela simetria desta matriz, esta classe de sistemas Lotka-Volterra estavelmente dissipativos permite encontrar exemplos de sistemas cuja dinâmica é dada pela dinâmica do sistema Lotka-Volterra de dimensão  $k$  que tem  $B$  como matriz de interacção.

Dizemos que o atrator é **trivial** nos casos:

- 1)  $\Gamma = \{q\}$ ;
- 2)  $\Gamma = \Sigma$  (pontos de equilíbrio);
- 3)  $\Gamma = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$  (dinâmica produto, grafo desconexo).

Os exemplos que conseguimos encontrar de atractores não triviais são todos muito simétricos. Conjecturamos assim que esta grande simetria seja típica de todos os atractores não triviais, pelo que genericamente o atrator de um sistema estavelmente dissipativo deve ser trivial.

Finalmente mostramos que todo o sistema estavelmente conservativo pode ser realizado como o atrator não trivial de um sistema estavelmente dissipativo com grafo conexo.

**Proposição 3.4.18.** *Dado um sistema estavelmente conservativo, existe um sistema estavelmente dissipativo cujo atrator é um subespaço afim invariante com a dinâmica do sistema conservativo.*

*Demonstração.* Seja  $G(A)$  o grafo sem ciclos de um sistema estavelmente conservativo com matriz de interação  $A$  do tipo  $n \times n$ .

$$\text{Seja } B = \left[ \begin{array}{c|c|c} A & 0 & v \\ \hline 0 & A & -v \\ \hline -v^T & v^T & -1 \end{array} \right] \text{ com } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que o grafo associado da matriz  $B$ ,  $G(B)$ , é uma árvore, como se pode ver na figura 3.19.

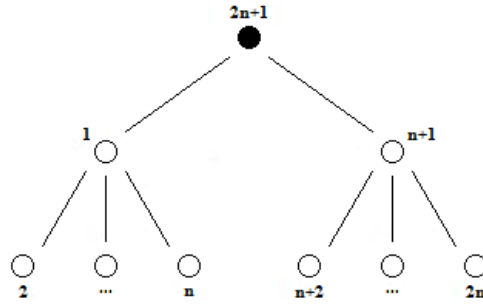


Figura 3.19: Grafo  $G(B)$  associado da matriz  $B$ .

O atrator do sistema Lotka-Volterra com matriz  $B$  e ponto de equilíbrio

$$q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

é o subespaço afim

$$\Gamma = \{x : x_i = x_{n+1}, \forall i = 1, \dots, n, x_{2n+1} = 1\}.$$

A restrição do sistema  $B$  a  $\Gamma$  é conjugado ao sistema definido pela matriz  $A$ .  $\square$





# Bibliografia

- [1] Birkhoff, G. D., Dynamical Systems, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, vol. 9, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1927.
- [2] van den Driessche, P., Zeeman, M. L., Three-dimensional competitive Lotka-Volterra systems with no periodic orbits, *SIAM J. Appl. Math.*, **58**, (1998), 227-234.
- [3] Duarte, P., Fernandes, R. L., Oliva, W. M., Dynamics of the attractor in the Lotka-Volterra, *J. Diff. Eqs.*, **149**, (1998), 143-189.
- [4] Guckenheimer, J., Holmes, P., Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, *Springer Verlag*, New York, 1983.
- [5] Guo, Z., Zhou, Z., Wang, S., Volterra multiplier for  $3 \times 3$  real matrices, *Math Pract. Th.*, **1**, (1998), 47-54.
- [6] Hernandez-Bermejo, B., Fairen, V., Lotka-Volterra representation of general nonlinear system, , *Math. Biosci.*, **140**, (1997), 1-32.
- [7] Hirsch, M. W., Systems of differential equations wich are competitive or cooperative I: limit sets, *SIAM J. Math. Anal.*, **13**, (1982), 167-179.
- [8] Hirsch, M. W., Systems of differential equations wich are competitive or cooperative III: competing species, *Nonlinearity*, **1**, (1988), 51-71.
- [9] Hirsch, M. W., Smale, S., Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, *Academic Press*, New York, 1974.
- [10] Hofbauer, J., Sigmund, K., Evolutionary Games and Population Dynamics, *Cambridge University Press*, Cambridge, 1998.
- [11] Hofbauer, J., So, J. W. H., Multiple limit cycles for three dimensional competitive Lotka-Volterra systems, *Appl. Math. Lett.*, **7**, (1994), 65-70.

- [12] Karakostas, G., Gyori, I., Global stability in job systems, *J. Math. Anal. Appl.*, **131**, (1988), 85-96.
- [13] LaSalle, J., Stably theory for ordinary differential equations, *J. Diff. Eqs.*, **4**, (1968), 57-65.
- [14] Lotka, A. J., Elements of Physical Biology, *Waverly Press*, Baltimore, Md., USA, 1925.
- [15] Olver, P. J., Applications of Lie Groups to Differential Equations, GTM vol. 107 *Springer-Verlag*, New-York, 1986.
- [16] Redheffer, R., Volterra multipliers I, *SIAM J. Alg. Disc. Math.*, **6**, (1985), 592-611.
- [17] Redheffer, R., A new class of Volterra differential equations for wich the solution are globally asymptotically stable, *J. Diff. Eqs.*, **82**, (1989), 251-268.
- [18] Redheffer, R., Walter, W., Solution of the stability problem for a class of generalized Volterra prey-predator systems, *J. Diff. Eqs.*, **52**, (1984), 245-263.
- [19] Redheffer, R., Zhou, Z., Global asymptotic stability for a class of many-variable Volterra prey-predator system, *J. Nonlinear Math. Appl.*, **5**, (1981), 1309-1329.
- [20] Redheffer, R., Zhou, Z., A class of matrix connected with Volterra prey-predator equation, *SIAM J. Alg. Disc. Math.*, **3**, (1982), 122-134.
- [21] Rocha Filho, T. M., Gléria, I. M., Figueiredo, A., A novel approach for the stability problem in non-linear dynamical systems, *Comput. Phys. Commun.*, **155**, (2003), 21-30.
- [22] Smale, S., On the differential equations of species in competition, , *J. Math. Biol.*, **3**, (1976), 5-7.
- [23] Smith, H. L., On the asymptotic behavior of a class of deterministic models of cooperating species, , *SIAM J. Appl. Math.*, **46**, (1986), 368-375.
- [24] Takeuchi, Y., Global Dynamical Properties of Lotka-Volterra Systems, *World Scientific*, Singapore, 1996.

- [25] Volterra, V., Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie, *Gauthier-Villars et Cie*, Paris, 1931.
- [26] Zeeman, M. L., Hopf bifurcations in competitive three dimensional Lotka-Volterra systems, *Dynam. Stab. Syst.*, **8**, (1993), 189-216.
- [27] Zeeman, M. L., Extinction in competitive Lotka-Volterra systems, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123**, (1995), 87-96.
- [28] Zeeman, M. L., On diverted periodic orbits in three-dimensional competitive Lotka-Volterra systems, in Martelli, M., Cooke, K., Cumberbatch, E., Tang, B., Thieme, H. (Eds.), *Differential Equations and Applications to Biology and to Industry* *World Scientific*, Singapore, 1995.
- [29] Zhao, X., Luo, J., Classification and dynamics of stably dissipative Lotka-Volterra systems, *International Journal of Non-linear Mechanics*, **45**, (2010), 603-607.